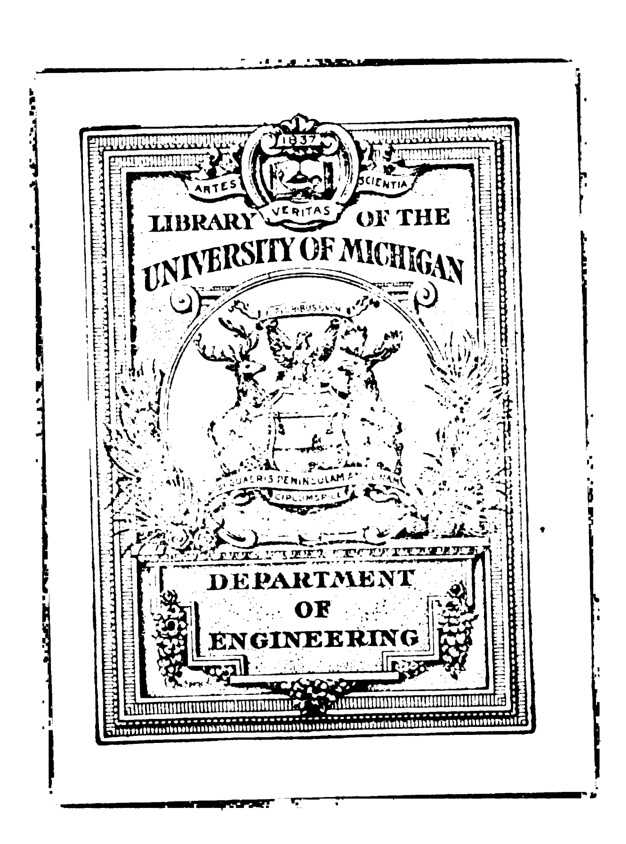
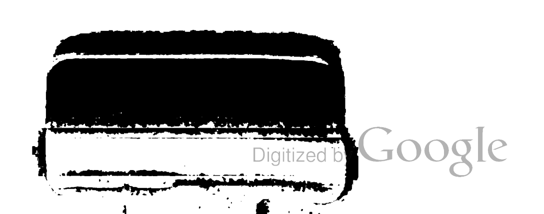

Josef Kozák
Grundprobleme
Ausgleichungsrechnung





[illegible]



[illegible] und königl. Hof-Buch-
[illegible] CARL FROMME
[illegible]

Grundprobleme der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate

von

Josef Kozák

k. u. k. Oberstleutnant im Festungs-artillerieregimente Nr. 4, zugeteilt dem Technischen Militärkomitee

Erster Band

Mit 10 Figuren im Texte



WIEN und LEIPZIG 1907 Kaiserl. und königl. Hof-Buchdruckerei und Hof-Verlags-Buchhandlung CARL FROMME

Verlags-Archiv Nr. 1078

Dem Herrn k. k. Hofrat und Professor

Emanuel Czuber

in dankschuldiger Ergebenheit gewidmet

vom Verfasser

Vorwort.

Obwohl über die Theorie der Beobachtungsfehler und die Ausgleichung von Beobachtungen nach verschiedenen Methoden, insbesondere nach der Methode der kleinsten Quadrate, bereits eine reichhaltige Literatur besteht, die den Bedürfnissen der Astronomen, Geodäten, Physiker in weitem Umfange genügt, wagt es der Verfasser dennoch, mit dieser Studie hervorzutreten, hoffend, deren Erscheinen durch die praktische Anlage des Stoffes rechtfertigen zu können.

Da sich die Methode der kleinsten Quadrate nicht auf einen besonderen Zweig des mathematisch-physikalischen Wissens beschränkt, sondern überall Anwendung findet, wo es darauf ankommt, durch Beobachtungen oder Versuche Zahlenangaben festzustellen, oder daraus zuverlässige Folgerungen zu ziehen, da ferner die Methode selbst für die Verläßlichkeit ihrer Ergebnisse einen Maßstab gibt, so war schon während ihrer Entstehung eine weitere Ausbreitung derselben ebensosehr wünschenswert als auch zu erwarten.

Unverkennbar ist der Nutzen, welchen die Schießlehre aus der Theorie der Beobachtungsfehler und der Methode der kleinsten Quadrate schöpfte. Bewährte Schießvorschriften nehmen nicht nur ihren Ausgangspunkt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, sondern ihr ganzer Aufbau stützt sich darauf. Aber auch bei der rationellen Anlage, bei der Durchführung und Verwertung von Schießversuchen ist die aus der Wahrscheinlichkeitstheorie hervorgehende Ausgleichungsrechnung unentbehrlich geworden.

Die große praktische Bedeutung des besprochenen Gegenstandes liegt also in der allseitigen Erkenntnis, daß es kaum eine Arbeit

im Gebiete der mit Messungen sich beschäftigenden Disziplinen gebe, die auf dessen Anwendung verzichten könnte.

„Der Praktiker hat aber," sagt Gerling sehr treffend in der Vorrede zu seinem bereits im Jahre 1843 erschienenen klassischen Werke (Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate), „nicht die Zeit, die Methode der kleinsten Quadrate aus den Quellenschriften zu studieren, sich erst dann die Anwendung auf die ihm gerade vorliegende Aufgabe selbst zu entwickeln, die praktische Rechnung nach den selbst entwickelten Formeln durchzuführen, und wenn etwa die Proberechnung einen vorgefallenen Irrtum nachweist, auszumitteln, ob derselbe in seiner Formel oder in seiner Rechnung liegt. Er bedarf vielmehr eines Behelfes, welcher ihm die Grundsätze, auf die es vorwiegend ankommt, in möglichst populärer Weise, d. h. mit alleiniger Voraussetzung der ihm schon geläufigen Vorkenntnisse darlege, die wichtigsten Anwendungen — vollständig entwickelt und durch Beispiele belegt — mitteile und ihm Gelegenheit gebe, durch bloßes Nachschlagen für alle vorkommenden Fälle wenigstens den einzuschlagenden Weg zu finden."

Solchen Anforderungen vollauf zu entsprechen, war meine Absicht bei der Zusammenstellung vorliegender Studie. Der Schwierigkeiten der Verfassung eines derartigen Werkes war ich mir wohl bewußt und stimme ich vollkommen überein mit dem Ausspruche Gerlings, der in der früher erwähnten Vorrede sagt: „Wenn ich es nun unternehme, diesem Bedürfnis entgegenzukommen, so verhehle ich mir dabei nicht die großen Schwierigkeiten, die sich einem solchen Beginnen entgegenstellen; im Gegenteil, ich halte die Aufgabe, einen Behelf über einen wissenschaftlichen Zweig zu schreiben, um ihn dadurch dem Bedürfnisse zugänglich zu machen, für eine der schwierigsten Aufgaben, die es überhaupt gibt. Weit entfernt bin ich davon, zu glauben, daß ich mit der vorliegenden Arbeit dieses mir vorschwebende Ideal erreicht habe; redlich bin ich jedoch bemüht gewesen, mich demselben soweit als möglich zu nähern."

Im Sinne dieses Ausspruches beabsichtigt die Studie, bei möglichster Wahrung des wissenschaftlichen Charakters, die Mitte zwischen jenen Darstellungen einzuhalten, welche fast nur Formeln

ohne Begründung bringen, und den über diesen Gegenstand bereits erschienenen Spezialwerken.

Eine klare Anordnung des Stoffes und eine auf gründliches Verständnis hinzielende sorgfältige und leichtverständliche Darstellung bildeten die Grundsätze für die Verfassung.

Die Entwicklungen sind absichtlich mit solcher Ausführlichkeit gegeben, daß sie ohne Zuziehung weiterer Behelfe verfolgt werden können. Durch die Einfügung einer größeren Zahl, wie ich hoffe, gut gewählter Beispiele ist der Erfassung der theoretischen Sätze vorgearbeitet, zugleich aber auch eine Anleitung zu praktischen Anwendungen derselben gegeben. Es sei noch bemerkt, daß selbst die einfachsten Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche in der Mittelschule gelehrt werden, in der vorliegenden Studie besprochen sind, denn — wie sich der Leser leicht überzeugen kann — erfordern selbst die in das Gebiet der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung fallenden Beispiele mitunter eine scharfe Zergliederung der Bedingungen der Aufgabe.

Das gesamte Werk soll demnach auch dem Anfänger die Möglichkeit bieten, sich leicht und selbständig in die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate einzuführen.

Der vorliegende erste Band bildet die unerläßliche theoretische Grundlage für die im zweiten Bande aufgestellten Untersuchungen im Schießwesen. Es sei jedoch gleich hier bemerkt, daß der zweite Band auch zahlreiche ergänzende theoretische Betrachtungen dort enthalten wird, wo dies für die Behandlung der betreffenden Probleme notwendig ist; so z. B. das Theorem von Bernoulli, dann die Wahrscheinlichkeit der möglichen Ursachen eines beobachteten Ereignisses und die Wahrscheinlichkeit künftiger Ereignisse auf Grund von Beobachtungen.

An dieser Stelle sehe ich mich ganz besonders verpflichtet, dem Herrn k. k. Hofrat Emanuel Czuber, Professor an der Technischen Hochschule in Wien, meinen ehrerbietigsten Dank dafür auszusprechen, daß er mir gestattete, seine anerkannt vorzüglichen Werke in so ausgiebiger Weise zu benützen, wie es in der vor-

liegenden Arbeit geschah, und daß er die Güte hatte, das Manuskript einer gründlichen Durchsicht zu unterziehen. Die mir von ihm gegebenen Winke und Anregungen habe ich zum Vorteile der Studie im weitesten Maße ausgenützt.

Mit dem Gefühle tiefster Dankbarkeit muß ich auch meines ehemaligen Lehrers der Ballistik, gegenwärtigen Präsidenten des Technischen Militärkomitees, Sr. Exzellenz des k. und k. Feldmarschalleutnants Nikolaus Ritter von Wuich gedenken, der es verstanden hat, durch seine bahnbrechenden Veröffentlichungen auf dem Gebiete der Ballistik hohes Interesse für diesen Gegenstand allerorts einzuflößen, und der wiederholt seine gütige Teilnahme für meine Arbeiten bekundete. Ich durfte auch diesmal viele wichtige ballistische Probleme, die sein geistiges Eigentum sind, im zweiten Bande benützen.

Dem k. und k. Reichskriegsministerium, welches mir durch seine munifizente Förderung die Veröffentlichung dieser Studie ermöglichte, erlaube ich mir hier meinen tiefgefühlten Dank auszusprechen.

Der Verlagsbuchhandlung Carl Fromme danke ich für das liebenswürdige Entgegenkommen, mit welchem sie alle meine Wünsche bei der Drucklegung des Werkes erfüllte und dasselbe äußerst vornehm ausstattete.

Wien, 4. Oktober 1906.

Der Verfasser.

Benützte Quellen.

Theorie der Beobachtungsfehler von Emanuel Czuber. Leipzig 1891.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung von Emanuel Czuber, Professor an der Technischen Hochschule in Wien. Leipzig 1903.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Zweiter Teil des ersten Bandes. Leipzig 1900—1904.

Handbuch der Vermessungskunde von Dr. W. Jordan. Erster Band: Ausgleichungsrechnung. Vierte erweiterte Auflage. Stuttgart 1895.

Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendungen auf die Geodäsie und die Theorie der Meßinstrumente von F. R. Helmert. Leipzig 1872.

Die Ausgleichungsrechnungen der praktischen Geometrie, oder die Methode der kleinsten Quadrate mit ihren Anwendungen für geodätische Aufgaben von Christian Ludwig Gerling. Hamburg und Gotha 1843.

Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung von G. Hagen. Dritte umgearbeitete Auflage. Berlin 1882.

Lehrbuch der sphärischen Astronomie in ihrer Anwendung auf geographische Ortsbestimmung von Dr. Josef Herr, nach dessen Tode vollendet von Dr. Wilhelm Tinter, o. ö. Professor der höheren Geodäsie und sphärischen Astronomie an der Technischen Hochschule in Wien. Wien 1887.

Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung von Dr. Norbert Herz. Leipzig 1900.

Hand- und Lehrbuch der niederen Geodäsie, begründet von Friedrich Hartner, fortgesetzt von Hofrat Josef Wastler und in 9. Auflage umgearbeitet und erweitert von Eduard Doležal, Professor an der k. k. Bergakademie in Leoben. I. Band. Wien 1903.

Lehrbuch der Physik von J. Violle, Professor an der École Normale zu Paris, deutsche Ausgabe von Dr. E. Gumlich etc. Erster Band. Berlin 1892.

Die Theorie der Wahrscheinlichkeit und ihre Anwendungen im Gebiete des Schießwesens. Gemeinfaßlich behandelt von Nikolaus Wuich, Hauptmann im Artilleriestabe. Wien 1877.

Lehrbuch der äußeren Ballistik, verfaßt von Nikolaus Wuich, Hauptmann des Artilleriestabes. Wien 1882.

Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung von Louis Navier. Deutsch herausgegeben und mit einer Abhandlung der Methode der kleinsten Quadrate begleitet von Dr. Theodor Wittstein, Professor an der Königlichen Generalstabsakademie in Hannover. Zweiter Band. Dritte vermehrte Auflage. Hannover 1866.



Inhaltsverzeichnis.

I. Abschnitt.

Fehlergattungen.

II. Abschnitt.

Fehlergesetz.

III. Abschnitt.

Genauigkeitsmaße.

IV. Abschnitt.

Direkte Beobachtungen.

V. Abschnitt.

Vermittelnde Beobachtungen.

Seite

VI. Abschnitt.

Bedingte Beobachtungen.

VII. Abschnitt.

Vergleichung des Fehlergesetzes mit der Erfahrung.

VIII. Abschnitt.

Der kleinste und der größte Fehler einer Beobachtungsreihe.

IX. Abschnitt.

Ausscheidung widersprechender Beobachtungen.

Tabellen.

also einem bestimmten Gesetze unterliegen, infolgedessen auch alle unter gleichen Umständen angestellten Beobachtungen stets in demselben Sinne von der Wahrheit abweichen werden.

Hat man z. B. zur Messung einer Strecke von der wahren Länge L Meßlatten benützt, die bei einer bestimmten Temperatur t^0 C die Länge $4\,m$ haben, wurde aber die Messung bei einer Temperatur von $t_1{}^0$ C durchgeführt und n Lattenlängen erhalten, so wird die gesuchte Länge sein:

$$L = 4\,n - \Delta L \text{ oder } L = 4\,n + \Delta L,$$

je nachdem $t_1 < t$ oder $t_1 > t$ ist,

wobei ΔL dem Temperatureinflusse zuzuschreiben und als ein regelmäßiger oder systematischer Fehler zu bezeichnen ist; das Vorzeichen ist von vornherein bestimmbar und der Fehler kann in Rechnung gebracht werden.

Die systematischen Fehler werden bedingt durch systematisch wirkende äußere Einflüsse (Temperatur, Luftfeuchtigkeit u. s. w.), haben übrigens ihre Quelle auch in den benützten Instrumenten und in der Art der Auffassung der beobachteten Erscheinung von Seite des Beobachters. Diese Fehler werden sich erst zu erkennen geben, wenn die Möglichkeit vorliegt, die Messungen, beziehungsweise Beobachtungen unter anderen äußeren Umständen, mit anderen Instrumenten, nach anderen Methoden u. s. w. anzustellen.

Es ist daher eine der wichtigsten Aufgaben des die Messung Leitenden und des Beobachters selbst, alle möglichen Ursachen der regelmäßigen Fehler sowie die Gesetze, nach welchen sie wirken, schon im voraus zu prüfen, um sie entweder ganz zu beseitigen oder durch Wahl der entsprechenden Methoden oder durch zweckmäßige Anordnung der Messungen, beziehungsweise Beobachtungen oder endlich durch Rechnung aus dem Resultate zu eliminieren.

Die regelmäßigen Fehler und ihre Tilgung finden in der Lehre von den Beobachtungen die nötige Würdigung.

Die groben, sowie die regelmäßigen oder systematischen Fehler kann man auch in eine Gruppe als vermeidliche Fehler zusammenfassen.

Zu 3. Unregelmäßige, zufällige oder unvermeidliche Fehler sind solche, die aus unregelmäßig wirkenden Fehlerquellen entspringen, deren Einfluß auf die Messung, beziehungsweise Beobachtung daher auch keinem Gesetze unterliegt und im voraus absolut keiner Berechnung unterworfen werden kann.

Hieher gehören z. B. die Fehler, welche aus der Unvollkommenheit unserer Sinne, aus der nicht mathematisch vollkommenen Kon-

struktion der Instrumente, aus einer nicht absolut festen Aufstellung derselben, aus der Einwirkung der Temperaturänderungen auf die einzelnen Teile der Instrumente, aus den äußeren Einflüssen auf die Beobachtung, wie ungleiche Beleuchtung, Unruhe der Bilder u. s. w. hervorgehen.

Man nennt sie unvermeidliche Messungs- oder Beobachtungsfehler, weil es nicht in der Macht des Beobachters liegt, sie gänzlich zu verhindern, obgleich er durch gesteigerte Sorgfalt imstande ist, sie in möglichst enge Grenzen zu bringen.

Der Hauptcharakter der unvermeidlichen Fehler liegt sonach darin, daß sie bei unter gleichen Umständen wiederholten Beobachtungen in verschiedener Größe auftreten.

Da sie nämlich aus so vielerlei Fehlerquellen entspringen, so ist die Abweichung der Beobachtung von dem wahren Resultate bald erheblicher, bald geringer, je nachdem die Wirkungen der einzelnen Fehlerquellen mehr oder weniger in gleichem Sinne, nämlich das Resultat vergrößernd oder verkleinernd, ausfallen oder nicht. Eine weitere Eigenschaft der unvermeidlichen Beobachtungsfehler ist die, daß sie ebensogut positiv wie negativ auftreten können.

3. Charakteristische Eigenschaften der unregelmäßigen, zufälligen oder unvermeidlichen Fehler.

Vorhin wurde klargelegt, was unregelmäßige, zufällige oder unvermeidliche Fehler sind und hierauf basiert auf ihre wichtigsten Eigenschaften geschlossen; nunmehr sollen die charakteristischen Eigenschaften dieser Fehlergattung, welche den Gegenstand der Fehlertheorie bildet, übersichtlich zusammengefaßt angeführt werden.

Wie unregelmäßig und scheinbar gesetzlos auch das Auftreten der zufälligen Beobachtungsfehler sein mag, so lassen sich doch schon aus dem Begriffe derselben einige charakteristische Eigenschaften folgern, wenn die Beobachtungen unter gleichen Umständen und mit gleicher Sorgfalt angestellt wurden, u. zw.:

a) Bei einer größeren Anzahl derselben werden positive und negative Beobachtungsfehler von derselben absoluten Größe gleich häufig vorkommen, d. i. gleich wahrscheinlich sein; denn im Gegenfalle müßte das Überwiegen der einen oder der anderen durch eine regelmäßig wirkende Ursache hervorgebracht, d. i. ein regelmäßiger Fehler vorhanden sein, welcher Fall im vorhinein ausgeschlossen wurde.

b) Kleinere Fehler werden häufiger vorkommen als größere und sind demnach wahrscheinlicher; denn um einen größeren Beobachtungsfehler zu erzeugen, müssen offenbar mehrere zufällig wirkende Fehlerquellen in demselben Sinne zusammenwirken oder die eine oder die andere in ungewöhnlich hohem Grade auftreten.

c) Theoretisch genommen wird ein beliebig großer Beobachtungsfehler nicht als unmöglich zu betrachten sein; in der Praxis jedoch wird es bei jeder Gattung von Beobachtungen eine, wenn auch nicht scharf bestimmbare Grenze geben, welche die Beobachtungsfehler nicht überschreiten, weil man immer annehmen muß, daß die Beobachtungen mit jener Genauigkeit gemacht sind, welche die in Rede stehende Beobachtungsgattung gestattet.

4. Ziel der Ausgleichsrechnung.

Nach dem bisher Gesagten ist bei Beobachtungen das Eintreten zufälliger Fehler unzweifelhaft; selbst wenn man ein Beobachtungsresultat absolut richtig erhalten würde, so wäre dieses nicht einer vollkommen fehlerfreien Beobachtung, sondern dem gegenseitigen Aufheben der zufälligen Fehler zuzuschreiben. Der Beobachter ist jedoch über deren Größe im Ungewissen, solange er sich nicht Mittel verschafft, hierüber ein Urteil fällen zu können. Mißt oder beobachtet man eine Größe nur einmal, oder mißt man eben nur so viele Größen, als für eine vorliegende Arbeit unumgänglich erforderlich sind, so wird man nie zu einem Urteil über die Richtigkeit seiner Arbeit gelangen. Hieraus folgt zunächst, daß mehr Beobachtungen angestellt werden müssen, als für den angestrebten Zweck erforderlich wären, um die Existenz von Fehlern zu erkennen. Das praktische Gefühl, welches der wissenschaftlichen Untersuchung gewöhnlich vorauszueilen pflegt, leitete auch schon von jeher dahin, nebst den notwendigen Messungen auch noch sogenannte Kontrollmessungen anzustellen. Bestimmt man aber ein und dieselbe Größe durch wiederholte Messungen, oder macht man überhaupt mehr Messungen (Beobachtungen) als unumgänglich erforderlich sind, sogenannte überschüssige (überzählige) Messungen, so ist in der Kombination der Beobachtungen ein Mittel geboten, um zu dem plausiblen oder wahrscheinlichsten oder vorteilhaftesten Resultate zu gelangen. Dieses letztere mit Benützung der überzähligen, im allgemeinen differierenden, sogenannten widersprechenden Beobachtungen aufzufinden, ferner über die Größe der zufälligen Fehler und über die Genauigkeit einer Arbeit näheren

Aufschluß zu geben, bildet den Gegenstand einer eigenen von Gauß aufgestellten Theorie, welche unter dem Namen **Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate** bekannt ist.

Messungsresultate, die einer Ausgleichung unterworfen werden sollen, müssen sowohl von groben als auch von regelmäßigen oder systematischen Fehlern befreit sein.

Das Gesagte soll, soweit tunlich, an zwei bis ins Detail ausgeführten Beispielen erläutert werden.

1. **Beispiel.** Zur Bestimmung der noch unbekannten Länge einer Strecke seien 4 Messungen vorgenommen worden, welche ergeben haben:

$$l_1 = 123{\cdot}81\,m,$$
$$l_2 = 123{\cdot}86\,m,$$
$$l_3 = 123{\cdot}81\,m,$$
$$l_4 = 128{\cdot}88\,m.$$

Der **Widerspruch** zwischen den Beobachtungen liegt hier darin, daß l_1, l_2, l_3, l_4 nicht untereinander gleich sind, obwohl alle vier Längen der wahren Länge der Strecke gleich sein sollen.

Die **wahre Länge** der Strecke sei mit X bezeichnet; diese Länge wird man infolge der Widersprüche in den angestellten, in überschüssiger Anzahl vorhandenen Beobachtungen selbstverständlich nicht bestimmen können, sondern nur die auf Grund vorliegender Beobachtungen **plausible Länge**, welche mit x bezeichnet werden möge. Man hat somit die wahre Länge X der Strecke von der plausiblen Länge x strenge zu unterscheiden.

Die an den Beobachtungen l_1, l_2, l_3, l_4 anzubringenden Änderungen müssen derart beschaffen sein, daß sie die Wirkung der zufälligen Fehler — denn nur solche werden vorausgesetzt — aufzuheben geeignet sind. Diese Änderungen sind demgemäß als **Verbesserungen** aufzufassen.

Zur Bestimmung der Größe dieser Verbesserungen halte man sich vor Augen, daß man für die Wahrheit kein anderes Zeugnis besitzt als jenes, welches die gemachten Beobachtungen ablegen; daß die Anbringung von Verbesserungen an dieselben ein durch äußere zufällige, nicht in unserer Gewalt befindliche Ursachen herbeigeführtes notwendiges Übel ist, und daß man also, indem man sich der unerreichbaren Wahrheit möglichst nähern will, dieses Übel so klein als möglich zu machen hat oder sich dem unmittelbaren Zeugnis der Beobachtungen so nahe als möglich anschließen soll.

Diesem Bedürfnis entspricht man nun, indem man für die Größe der Verbesserungen als Prinzip festsetzt, daß die Summe der Quadrate der Verbesserungen so klein als möglich werde.

Bezeichnet man, zum vorgelegten Zahlenbeispiel zurückkehrend, die an l_1, l_2, l_3, l_4 anzubringenden Verbesserungen, beziehungsweise mit λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, so bestehen die Gleichungen:

$$x = l_1 + \lambda_1 = l_2 + \lambda_2 = l_3 + \lambda_3 = l_4 + \lambda_4,$$

oder in anderer Schreibart

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + x, \\ \lambda_2 &= -l_2 + x, \\ \lambda_3 &= -l_3 + x, \\ \lambda_4 &= -l_4 + x, \end{aligned}$$

worin, wie bereits gesagt, x die noch unbekannte plausible Länge der Strecke bedeutet.

Die Voranstellung des negativen Gliedes vor das positive in den rechten Teilen dieser Gleichungen geschah unter Berücksichtigung des Umstandes, daß dieser Schreibweise in der einschlägigen Literatur der Vorzug gegeben wird. Nun sind nach dem festgesetzten Prinzipe die Größen λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 so zu bestimmen, daß die Summe ihrer Quadrate, d. i.

$$S = (-l_1 + x)^2 + (-l_2 + x)^2 + (-l_3 + x)^2 + (-l_4 + x)^2$$

ein Minimum wird. Es liegt in der Natur der Aufgabe, daß hier nur ein Minimum eintreten kann. Im Ausdrucke für S ist x die einzige Veränderliche und man erhält durch Differentiation nach x:

$$\frac{dS}{dx} = 2(-l_1 + x) + 2(-l_2 + x) + 2(-l_3 + x) + 2(-l_4 + x).$$

Damit S so klein als möglich werde, muß demnach die Beziehung stattfinden:

$$(-l_1 + x) + (-l_2 + x) + (-l_3 + x) + (-l_4 + x) = 0.$$

Die Auflösung dieser Gleichung gibt:

$$x = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + l_4}{4} = 123 \cdot 8275\, m;$$

hiemit findet man

$$\lambda_1 = +0 \cdot 0175, \quad \lambda_2 = -0 \cdot 0325, \quad \lambda_3 = +0 \cdot 0175, \quad \lambda_4 = -0 \cdot 0025.$$

Bildet man nun die Summen $l_1 + \lambda_1$, $l_2 + \lambda_2$, $l_3 + \lambda_3$, $l_4 + \lambda_4$, welche man die ausgeglichenen Beobachtungen nennt, so sieht

man, daß dieselben einander gleich werden, und man muß letztere für den Wert des unbekannten X, d. i. für die wahre Länge der Strecke annehmen, und zwar wenigstens solange, als nicht neue Beobachtungen hinzukommen. Unter demselben Vorbehalte muß man dann konsequenterweise auch $-\lambda_1$, $-\lambda_2$, $-\lambda_3$, $-\lambda_4$ für die unvermeidlichen Fehler halten, die in den vorliegenden Messungen, für den Beobachter unbewußt, enthalten waren, und macht somit auch stillschweigend für die Größe dieser Fehler die Voraussetzung der kleinsten Quadratsumme. Man hat also strenge zwischen „Fehler (Widerspruch)" und „Verbesserung" den Unterschied zu machen; es ist:

Fehler (Widerspruch) = Beobachtungsgröße — Sollbetrag,
Verbesserung = Sollbetrag — Beobachtungsgröße.

Sie sind absolut gleich, aber mit entgegengesetzten Qualitätszeichen versehen.

Man hat also das arithmetische Mittel für den wahren Wert zu nehmen und macht hier die merkwürdige Erfahrung, daß das festgesetzte Prinzip auf dieselbe Rechnungsoperation führt, welche seit Jahrhunderten, ehe von Ausgleichsrechnungen im allgemeinen die Rede sein konnte, von dem praktischen Gefühle vorgeschrieben wurde.

2. Beispiel. Es sei ein Punkt einer Ebene zu bestimmen. Bekanntlich kann dies auf verschiedene Arten, beispielsweise durch die Angabe der Koordinaten dieses Punktes bezogen auf zwei rechtwinkelige, sonst aber beliebig in der Ebene liegende Achsen erfolgen. Mißt man jedoch wiederholt die beiden Koordinaten eines und desselben Punktes, so erhält man beispielsweise bei der

ersten Messung x_1, y_1,
zweiten „ x_2, y_2,
dritten „ x_3, y_3.

Der durch die unvermeidlichen Fehler herbeigeführte und durch die Ausgleichung wegzuschaffende Widerspruch ist hier ein doppelter. Es sind nämlich weder die x Koordinaten noch die y Koordinaten einander gleich. Die wahren Werte X, Y der Koordinaten des Punktes wird man nie ermitteln können, sondern nur die auf Grund der vorliegenden drei Messungen plausiblen Werte, welche zum Unterschiede von den wahren Werten mit x, y bezeichnet werden mögen. Man hat somit nach den bisherigen Untersuchungen zu setzen

$$x = x_1 + \lambda_1 = x_2 + \lambda_3 = x_3 + \lambda_5,$$
$$y = y_1 + \lambda_2 = y_3 + \lambda_4 = y_2 + \lambda_6,$$

oder in anderer Schreibart

$$\lambda_1 = -x_1 + x, \qquad \lambda_2 = -y_1 + y,$$
$$\lambda_3 = -x_2 + x, \qquad \lambda_4 = -y_2 + y,$$
$$\lambda_5 = -x_3 + x, \qquad \lambda_6 = -y_3 + y.$$

Nun ist

$$S = (-x_1 + x)^2 + (-y_1 + y)^2 + (-x_2 + x)^2 + (-y_2 + y)^2 + \\ + (-x_3 + x)^2 + (-y_3 + y)^2,$$

also erscheint S als Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen, nämlich x und y. Die partielle Differentiation nach diesen Veränderlichen gibt

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2(-x_1 + x) + 2(-x_2 + x) + 2(-x_3 + x),$$
$$\frac{\partial S}{\partial y} = 2(-y_1 + y) + 2(-y_2 + y) + 2(-y_3 + y).$$

Da nach dem festgesetzten Prinzip S ein Minimum werden muß, so hat man als Bedingungsgleichungen hiefür

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = 0$$

oder

$$(-x_1 + x) + (-x_2 + x) + (-x_3 + x) = 0,$$
$$(-y_1 + y) + (-y_2 + y) + (-y_3 + y) = 0.$$

Diese beiden Gleichungen enthalten die zu bestimmenden Größen bereits getrennt und man findet

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3},$$

welche Werte auf Grund der vorliegenden Messungen die plausiblen oder wahrscheinlichsten Werte der Koordinaten des zu bestimmenden Punktes darstellen; auf Grund der vorliegenden Beobachtungen können diese Koordinaten als die wahren Werte der Koordinaten angesehen werden.

Man erkennt, daß der plausible Punkt mit dem Schwerpunkte der durch die unmittelbare Beobachtung gefundenen Punktlagen zusammenfällt.

Zu diesem Beispiele sei noch die folgende Bemerkung beigefügt: Der Ausdruck $(-x_i + x)^2 + (-y_i + y)^2$ stellt bekanntlich das Quadrat des Abstandes des durch x_i, y_i bestimmten Punktes

vom Punkte, dessen Koordinaten x, y sind, dar. Der Ausdruck S drückt somit die Summe der Quadrate der Abstände der drei Punkte $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$ vom Punkte x, y aus. Man erkennt daher, daß das angegebene Verfahren denjenigen Punkt für den wahren zu nehmen lehrt, dessen Abstände von den anderen, durch die einzelnen Beobachtungen gefundenen Punkten, eine möglichst kleine Quadratsumme geben. Auch im 1. Beispiel, wo die Punkte alle in gerader Linie lagen, ist die Quadratsumme der Abstände ein Minimum geworden.

Nach denselben Grundsätzen wäre vorzugehen, wenn ein Punkt des Raumes durch drei rechtwinkelige Koordinaten zu bestimmen wäre. Erfolgt die Messung derselben dreimal, so erhält man schließlich

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

Es muß hier noch besonders erwähnt werden, daß auch in dem Falle, wo für die verschiedenen Koordinaten nicht eine gleiche Anzahl von Beobachtungen vorliegt, doch das arithmetische Mittel aus den Messungen jeder einzelnen Koordinate genommen werden müßte. Wenn also beispielsweise im letzten Falle nicht alle drei Koordinaten gleich oft gemessen worden wären, sondern nur zwei Messungen für x, dagegen drei Messungen für y und vier Messungen für z vorliegen, so würde man nach demselben Prinzip erhalten:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad z = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}.$$

Liegen also Beobachtungen in überschüssiger Anzahl vor, so hat man sich zunächst die Widersprüche klar zu machen, welche in ihnen liegen oder aus ihnen folgen, sodann kann man die Aufgabe der Ausgleichsrechnung im allgemeinen in folgender Weise formulieren:

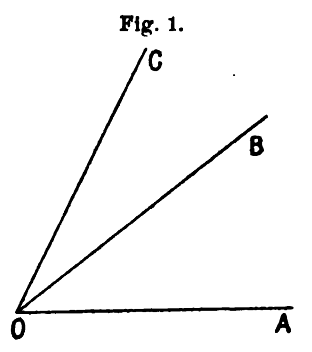
Für das System der wirklich beobachteten Größen ist ein anderes System von Größen — die ausgeglichenen Beobachtungen — zu substituieren, welche die Eigenschaft haben, daß *a)* alle Widersprüche wegfallen, die sich in den Beobachtungen oder deren Folgerungen vorfinden, und daß *b)* die Unterschiede zwischen den ausgeglichenen Beobachtungen und den wirklichen Beobachtungen eine möglichst kleine Quadratsumme geben.

5. Beispiele.

Zum besseren Verständnis des Gesagten seien noch weitere Beispiele beigefügt:

Wurden Beobachtungen in überschüssiger Anzahl angestellt, so wird sich das Vorhandensein der in ihnen enthaltenen unvermeidlichen Fehler im allgemeinen und in der Regel, wie bereits bekannt, dadurch bemerkbar machen, daß unter den Beobachtungen selbst, oder den daraus gezogenen Folgerungen Widersprüche stattfinden. Hat man z. B. einen und denselben Winkel dreimal gemessen, so muß man darauf rechnen, daß die drei Angaben, wenn auch noch so wenig, voneinander verschieden sind, und also jede einzelne über die wahre Größe des gemessenen Winkels eine Aussage abgibt, welche die Angaben der beiden anderen negiert. Hat man nun die drei Messungsergebnisse zur Gewinnung eines Wertes des zu bestimmenden Winkels irgendwie kombiniert, so erfordert die Aufhebung der Widersprüche, daß man an jedem Messungsresultat eine Korrektur anbringe, welche es dem aus der Kombination gewonnenen Werte der Unbekannten gleich macht.

Fig. 1.



Will man von einem Punkte O (Fig. 1) aus die gegenseitige Lage dreier gerader Linien OA, OB, OC bestimmen und dazu eine überschüssige Beobachtung mitbenützen, so wird man die Winkel AOB, BOC und auch noch AOC messen und hat dann zu erwarten, daß die Messung der Summe AOC etwas verschieden ausfällt von der durch Addition der beiden übrigen gemessenen Winkel berechneten Summe. Wieder wird es sich darum handeln, alle Messungen zu einer eindeutigen Bestimmung der gegenseitigen Lage der drei Strahlen zu kombinieren, und dies wird wieder mit einer Ausgleichung der Messungsergebnisse einhergehen.

Mißt man in einem Dreieck alle drei Winkel, so wird der Widerspruch sich darin finden, daß jeder Winkel durch die Messung selbst etwas anders angegeben wird, als man ihn durch Berechnung aus den beiden anderen findet. Damit dieser Widerspruch mit der Theorie aufhöre, werden an den Messungsergebnissen Änderungen anzubringen sein, welche den Winkeln die Eigenschaft, die Winkel eines Dreieckes darstellen zu können, erst verleihen. Die so bestimmten Dreieckswinkel werden die ausgeglichenen Dreieckswinkel genannt.

Es wurde gesagt, daß bei Beobachtungen in überschüssiger Anzahl im allgemeinen und in der Regel Widersprüche stattfinden werden, sobald zufällige Fehler vorhanden sind; man kann allerdings die Möglichkeit nicht leugnen, daß in einzelnen Fällen der Widerspruch wegfallen könnte. Ein solches Ereignis müßte man aber dann selbst für zufällig halten und darauf rechnen, daß noch weitere angestellte, mit unvermeidlichen Fehlern behaftete Beobachtungen einen Widerspruch zum Vorschein bringen würden, weil im Gegenfalle entweder die Beobachtungen ganz fehlerfrei sein müßten, was nicht möglich ist, oder die begangenen Fehler nicht zufällig wären, was gegen die Voraussetzung ist.

Der Umstand, daß sich Widersprüche in den angestellten, in überschüssiger Anzahl vorhandenen Beobachtungen finden, macht es nun unmöglich, mit absoluter Gewißheit die Wahrheit zu erkennen, welche man sucht. Es sind gleichsam mehrere gleich glaubwürdige Zeugenaussagen über eine und dieselbe Tatsache vorhanden, welche aber voneinander etwas abweichen. Man muß sich also begnügen, statt der gesuchten Wahrheit selbst eine derselben möglichst angenäherte Angabe zu finden, welche man für die Wahrheit annehmen kann und solange wenigstens annehmen muß, bis etwa durch neu hinzugekommene Beobachtungen eine weitere Annäherung zu gewinnen ist.

Sind l_1, l_2, l_3 beispielsweise die direkten Beobachtungsergebnisse einer unbekannten Größe, so hat man also die Aufgabe, aus denselben einen Wert x abzuleiten, der dem wahren Werte, welcher X heißen möge, möglichst nahe kommt.

x nennt man den plausiblen oder wahrscheinlichsten oder vorteilhaftesten Wert der Unbekannten. Derselbe weicht von l_1, l_2, l_3 um Größen λ_1, λ_2, λ_3 ab, um welche diese verbessert werden müssen, damit sie unter sich und mit x übereinstimmen.

Die Größen λ_1, λ_2, λ_3 nennt man die plausiblen Verbesserungen, ihre negativen Werte die plausiblen oder scheinbaren Beobachtungsfehler.

$l_1 + \lambda_1$, $l_2 + \lambda_2$, $l_3 + \lambda_3$ heißen die ausgeglichenen Beobachtungswerte.

Man hat ohne weiteres die Gleichungen:

$$\lambda_1 = - l_1 + x,$$
$$\lambda_2 = - l_2 + x,$$
$$\lambda_3 = - l_3 + x,$$

welche Fehlergleichungen heißen mögen. Da nun schon eine dieser Gleichungen ($\lambda = o$ gesetzt) ausreicht zu einer Bestimmung

der Unbekannten, so sind 3—1 der Gleichungen und Messungen überschüssig. Allgemein bei n direkten Beobachtungen einer unbekannten Größe sind $n-1$ überschüssige Beobachtungen und Fehlergleichungen vorhanden.

Für den wahren Wert der Unbekannten und die wahren Verbesserungen hat man die Gleichungen:

$$\varepsilon_1 = -l_1 + X,$$
$$\varepsilon_2 = -l_2 + X,$$
$$\varepsilon_3 = -l_3 + X;$$

dieselben lassen zwar X nicht finden, werden sich aber in der Folge doch nützlich erweisen.

6. Übersicht der verschiedenen Formen der Ausgleichungsaufgaben.

Die Aufgaben, welche in der Ausgleichsrechnung zur Behandlung kommen, lassen sich vom praktischen Gesichtspunkte aus in drei Gruppen teilen, je nachdem ihnen zu Grunde liegen:

a) Direkte Beobachtungen, wobei die gesuchte Größe unmittelbar beobachtet wird oder aber als Funktion von direkt beobachteten Größen auftritt.

b) Vermittelnde Beobachtungen, bei welchen die gesuchte Größe, beziehungsweise die gesuchten Größen auf Grund anderer direkt bestimmbarer Größen, mit welchen sie in einem bekannten Zusammenhange stehen, abgeleitet werden.

c) Bedingte Beobachtungen, bei denen zwischen den gesuchten, direkt beobachteten oder den auf Grund von vermittelnden Beobachtungen bestimmten Größen Bedingungsgleichungen bestehen, die streng erfüllt werden müssen.

II. Abschnitt.

Fehlergesetz.

1. Das Fehlergesetz (Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion, Gesetz der Fehlerhäufigkeit) und die Fehlerwahrscheinlichkeitskurve im allgemeinen.

Aus den Eigenschaften der zufälligen Beobachtungsfehler folgt, daß die Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Beobachtungsfehlers x jedenfalls von dessen Größe abhängt und somit als Funktion derselben betrachtet werden darf. Die Wahrscheinlichkeit, den zufälligen Beobachtungsfehler $+x$ zu begehen, ist ebenso groß, wie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler $-x$, wie dies die erste der im I. Abschnitte, Punkt 3, angeführten Eigenschaften der zufälligen Beobachtungsfehler erfordert. Die Häufigkeit des Auftretens der Fehler gestaltet sich also symmetrisch in Bezug auf den Fehler Null. Zufolge der zweiten Eigenschaft der zufälligen Beobachtungsfehler muß der Wert der Wahrscheinlichkeit, der für $x=0$ ein Maximum ist, mit zunehmendem x abnehmen; aus der dritten folgt endlich, daß, wenn x über eine gewisse Grenze hinaus wächst, die Wahrscheinlichkeit sehr klein werden oder der Grenze Null sich nähern muß.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler zwischen 0 und x begangen wird, kann als eine Funktion der oberen Grenze x angesehen werden; diese Funktion sei durch $\Phi(x)$ bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler zwischen 0 und $x+dx$ liegt, lautet alsdann $\Phi(x+dx)$. Weil das Intervall, in welchem der Fehler erwartet wird, in diesem Falle größer ist als im ersten Fall, so muß auch $\Phi(x+dx) > \Phi(x)$. Die Differenz $\Phi(x+dx) - \Phi(x) = \Phi'(x)\,dx$ der Wahrscheinlichkeiten $\Phi(x+dx)$ und $\Phi(x)$ hat auch die Bedeutung einer Wahrscheinlichkeit. Sie stellt die Wahrscheinlichkeit dar, daß ein Fehler in das Intervall von x bis $x+dx$ fällt oder

zwischen den Grenzen x und $x + dx$ eingeschlossen ist und sie beträgt $\Phi'(x)\,dx$.

Bezeichnet man die Funktion $\Phi'(x)$ mit $\varphi(x)$, so ist $\varphi(x)\,dx$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der begangene Fehler zwischen x und $x + dx$ liegt. Man sagt, wenn auch nicht ganz richtig, $\varphi(x)\,dx$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Fehler x begangen wird. Stillschweigend hat man hinzuzudenken, daß eigentlich der begangene Fehler zwischen x und $x + dx$ liegt, wobei dx unendlich klein ist. Die Anwesenheit eines unendlich kleinen Faktors dx in $\varphi(x)\,dx$ erklärt sich dadurch, daß bei der unendlichen Anzahl der möglichen Fehler die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen bestimmten Fehlers notwendig unendlich klein ist.

Wenn man $\varphi(x)\,dx$ kurzweg als die Wahrscheinlichkeit des Fehlers x bezeichnet, so gründet sich dies auf die Vorstellung, daß alle Fehler des Intervalls x bis $x + dx$ als untereinander gleich und gleich x angesehen werden, gegen welche Vorstellung vom praktischen Standpunkte nichts einzuwenden ist.

Die Funktion $\varphi(x)$ heißt das Fehlergesetz oder die Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion oder das Gesetz der Fehlerhäufigkeit.

Die Kurve, deren Gleichung $y = \varphi(x)$ ist, stellt in ihren Ordinaten den Verlauf der Wahrscheinlichkeit des Fehlers x, welcher als Abszisse aufgetragen wird, dar und heißt aus diesem Grunde die Fehlerwahrscheinlichkeitskurve. Es hat dann die Wahrscheinlichkeit $\varphi(x)\,dx$ eines Fehlers zwischen x und $x + dx$ die Bedeutung eines Flächenelements. Die Funktion $\varphi(x)$ wird eine gerade sein müssen, damit sie für gleiche positive und negative Werte von x denselben Wert erhält; es muß also bestehen:

$$\varphi(x) = \varphi(-x).$$

Die Kurve $y = \varphi(x)$ liegt demgemäß symmetrisch zur y-Achse.

Wäre die Bedingung $\varphi(x) = \varphi(-x)$ nicht erfüllt, sondern etwa $\varphi(x) > \varphi(-x)$, so würde dies heißen, daß in den Beobachtungen ein Moment liegt, welches positive Fehler, d. h. zu große Resultate, gegenüber negativen Fehlern begünstigt. Dies widerspricht jedoch der Natur der zufälligen Fehler.

Ist dem absoluten Werte nach $x_1 < x_2$, so muß $\varphi(x_1) > \varphi(x_2)$, denn große Fehler sind weniger häufig als kleine Fehler.

$\varphi(0)$ ist ein Maximum der Funktion. Dies entspricht der Erkenntnis, daß die Fehler, die der Null am nächsten liegen, am häufigsten vorkommen.

Es stelle die in Fig. 2 gezeichnete Kurve die Fehlerwahrscheinlichkeitskurve $y = \varphi(x)$ dar. Ist $OA = x$, $AA' = dx$, so repräsentiert der Elementarflächenstreifen $AA'L'L = \varphi(x)\,dx$ die Wahrscheinlichkeit, daß der begangene Fehler zwischen x und $x + dx$ liegt.

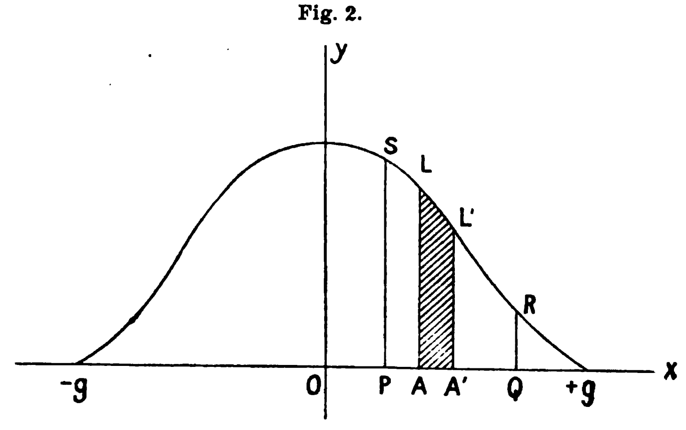
Ist $OP = \alpha$ und $OQ = \beta$, so drückt

$$\text{die Fläche } PQRS = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\,dx$$

die Wahrscheinlichkeit dafür aus, daß der begangene Fehler zwischen zwei um einen endlichen Betrag verschiedenen Grenzen α und β liegt.

Schneidet die Fehlerwahrscheinlichkeitskurve die x-Achse in den Abständen $x = \pm g$ von O, so ist damit gesagt, daß alle Fehler

Fig. 2.



sicher zwischen $-g$ und $+g$ liegen müssen, und es ist, da die Einheit die Gewißheit charakterisiert,

$$\int_{-g}^{+g} \varphi(x)\,dx = 1.$$

Die Fehlergrenzen $-g$ und $+g$, bis zu deren absolutem Betrage Fehler begangen werden können, lassen sich jedoch nicht immer scharf bestimmen. Eine allgemeine, alle Arten von Beobachtungen umfassende Theorie muß diese Grenzen unbestimmt lassen. Um dieser Schwierigkeit auszuweichen, schreibt man

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1,$$

da es gewiß ist, daß der Fehler zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ liegen muß, die diesem Falle entsprechende Wahrscheinlichkeit demnach zur Gewißheit wird, also der Einheit gleich ist.

Dieser Ausdruck paßt für alle Fälle. Erfüllt $\varphi(x)$ die Forderung, daß es für alle Werte von x jenseits der Fehlergrenzen Null ist, dann hat die Ausdehnung der Integrationsgrenzen keine Folgen, denn man erhält keinen Beitrag zum Integralwert; erfüllt die Funktion jene Forderung nicht, dann muß sie notwendig jenseits der Fehlergrenzen so kleine Werte annehmen, daß der daraus resultierende Anteil des Integrals gegenüber demjenigen, welcher sich auf dem Gebiete der möglichen Fehler ergibt, als verschwindend betrachtet werden kann.

Wichtig ist auch die folgende Bemerkung: Die Wahrscheinlichkeit, daß bei einer Reihe von Beobachtungen ein Fehler zwischen den äußersten Grenzen der möglichen Fehler liegt, ist offenbar die Gewißheit entsprechend der ganzen Fläche der Kurve, die daher bei den Flächenvergleichungen als Einheit zu dienen hat.

Es ist also die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler zwischen den Grenzen α und β liegt, dargestellt durch das Verhältnis des von den zu α und β gehörigen Ordinaten abgegrenzten Flächenstückes zur ganzen von der Kurve $y = \varphi(x)$ eingeschlossenen Fläche; die in Frage stehende Wahrscheinlichkeit ist also gegeben durch

$$\frac{\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\, dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx}.$$

Die Bedeutung des Ausdruckes $\varphi(x)\,dx$ kann man noch von einer anderen Seite betrachten. In das Intervall x bis $x + dx$ wird eine gewisse Anzahl von Fehlern fallen; diese Anzahl sei gleich z_x. Die Fehler selbst können als gleich groß, jeder gleich x, angesehen werden, denn sie können sich höchstens um dx voneinander unterscheiden. Ist N die Gesamtzahl aller möglichen Fehler, so drückt der Bruch $\frac{z_x}{N}$ auch die Wahrscheinlichkeit aus für das Auftreten eines Fehlers in dem Intervall x bis $x + dx$. Man kann also setzen

$$\frac{z_x}{N} = \varphi(x)\, dx, \qquad \text{oder}$$

$$\frac{\text{Zahl der Fehler zwischen } x \text{ und } x + dx}{\text{Gesamtzahl der Fehler}} = \varphi(x)\, dx.$$

2. Mittel und Wege zur Auffindung des Fehlergesetzes.

Das wahre Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler, für welches die analytische Funktion $\varphi(x)$ eine **Annäherung** bilden soll, hängt ohne Zweifel nicht allein von der Größe des Fehlers, sondern auch von anderen Umständen ab, ändert sich daher von Fall zu Fall. So wird die Individualität des Beobachters, die Beschaffenheit der von ihm verwendeten Instrumente und die gemessene Größe selbst dabei eine Rolle spielen.

Die angeführten charakteristischen Eigenschaften der zufälligen Fehler reichen allein zur Bestimmung der Funktion $\varphi(x)$ nicht hin. Es ist vielmehr einleuchtend, daß es unendlich viele Funktionen gibt, welche diese Eigenschaften besitzen.

Die Aufstellung von $\varphi(x)$ kann nicht Gegenstand einer rein analytischen Deduktion sein, sie muß sich vielmehr notwendig auf die Erfahrung stützen. Das primitivste Verfahren bestünde darin, daß man versuchsweise Formen für $\varphi(x)$ aufstellt, welche gewissen durch die Erfahrung diktierten Forderungen genügen; der Vergleich mit ausgeführten Beobachtungsreihen hätte dann zu entscheiden, wie weit diese Formen der Wirklichkeit entsprechen und welche von ihnen dies am vollkommensten erfüllt.

Von diesem Verfahren wird hier aus naheliegenden Gründen abgesehen und zu demjenigen Verfahren übergegangen, welches der ersten wissenschaftlich begründeten Aufstellung von $\varphi(x)$ durch **Gauß** zu Grunde liegt.

3. Ableitung des Fehlergesetzes aus der Hypothese des arithmetischen Mittels. Das Fehlergesetz von Gauß.

Der einfachste Weg, durch Beobachtungen (Messungen) den wahrscheinlichsten Wert einer unbekannten Größe, deren wahrer Wert X sei, zu bestimmen, ist der, daß man **diese Größe mit gleichen Mitteln und unter gleichen Umständen wiederholt beobachtet** (mißt). Da die Ergebnisse, selbst wenn die Beobachtungen (Messungen) noch so genau gemacht werden, stets mit Fehlern behaftet sind, so werden sie untereinander nicht übereinstimmen.

Angenommen, die unbekannte Größe wurde mit gleicher Sorgfalt n-mal gemessen und es seien hiebei die verschiedenen Werte $l_1, l_2, l_3, \ldots\ldots, l_n$ erhalten worden. Nach der Voraussetzung verdienen alle diese Werte gleiches Vertrauen; wenn man daher vor die Wahl gestellt wäre, einen hievon als den richtigen Wert von X zu wählen, so könnte man jeden mit gleichem Rechte als solchen ansehen.

Die Wahl eines einzelnen Wertes von den vorliegenden Werten wäre eine Willkür und es kämen alle anderen gar nicht in Betracht, ihre Ermittlung wäre überflüssig gewesen.

Man wird sich daher die Frage folgendermaßen stellen: Welchen Wert für X hat man auf Grund aller vorliegenden Messungen zu bevorzugen?

Es wird nach der Methode von Gauß angenommen, daß der wahrscheinlichste (vorteilhafteste oder plausible) Wert einer Größe, welche wiederholt mit gleichbleibender Genauigkeit beobachtet wurde, das arithmetische Mittel der Beobachtungsresultate ist. Bedeutet x das arithmetische Mittel, so hat man

$$1) \qquad x = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_n}{n}.$$

Es liegt im Wesen des arithmetischen Mittels, daß der Wert desselben irgendwo zwischen dem kleinsten und dem größten Beobachtungswert liegt; er fällt nie außerhalb des Gebietes der Beobachtungsergebnisse.

Es handelt sich jetzt um die Beantwortung der Frage: Wie bestimmt man das Fehlergesetz auf Grund der Voraussetzung, daß das arithmetische Mittel der Beobachtungen der wahrscheinlichste Wert der unbekannten Größe ist?

Dadurch, daß man für die unbekannte Größe den Wert x annimmt, schreibt man jeder gemachten Beobachtung l_i einen bestimmten Fehler $-\lambda_i$ zu, so daß $\lambda_i = -l_i + x$. Man hat also

$$2) \qquad \begin{cases} \lambda_1 = -l_1 + x, \\ \lambda_2 = -l_2 + x, \\ \quad\vdots \\ \lambda_n = -l_n + x. \end{cases}$$

Ändert man den Wert von x, so erhält man auch ein anderes Fehlersystem; jeder willkürlich angenommene Wert (Hypothese) von x erzeugt ein bestimmtes Fehlersystem, welchem eine bestimmte Wahrscheinlichkeit entspricht. Setzt man also statt des arithmetischen Mittels x den Wert ξ ein, so erhält man das Fehlersystem

$$3) \qquad \begin{cases} \delta_1 = -l_1 + \xi, \\ \delta_2 = -l_2 + \xi, \\ \quad\vdots \\ \delta_n = -l_n + \xi. \end{cases}$$

Mit der Annahme des Wertes ξ sind auch schon die Fehler δ gegeben; ξ und alle δ sind ebenso wie x und alle λ koexistente Größen.

Die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler von der bestimmten Größe δ_1 begangen werde, oder vielmehr, daß er zwischen den Grenzen δ_1 und $\delta_1 + d\delta$ liege, wird ausgedrückt durch

$$\varphi(\delta_1)\, d\delta.$$

Nimmt man das Fehlerintervall konstant und gleich $d\delta$ an, so erhält man für die Fehler $\delta_2, \delta_3, \ldots\ldots, \delta_n$ die analogen Ausdrücke:

$$\begin{gathered}\varphi(\delta_2)\, d\delta, \\ \varphi(\delta_3)\, d\delta, \\ \vdots \\ \varphi(\delta_n)\, d\delta.\end{gathered}$$

Die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens dieser Fehler*) aus der Annahme ξ, oder die Wahrscheinlichkeit, daß bei n Beobachtungen gerade diese Fehler eintreten oder zusammentreffen, wird ausgedrückt durch das Produkt

$$4) \qquad \varphi(\delta_1)\ \varphi(\delta_2)\ \ldots.\ \varphi(\delta_n)\,(d\delta)^n.$$

---

*) Es sei $\frac{g_1}{m_1}$ der echte Bruch, welcher die Wahrscheinlichkeit des Beobachtungsfehlers von der Größe δ_1, und $\frac{g_2}{m_2}$ der echte Bruch, welcher die Wahrscheinlichkeit des von δ_1 unabhängigen Beobachtungsfehlers δ_2 ausdrückt. Das heißt unter je m_1 möglichen Fällen gibt es g_1 Fälle, in denen der Fehler δ_1 zu erwarten ist, folglich unter je $m_1 m_2$ möglichen Fällen gibt es $g_1 m_2$ Fälle, in denen derselbe Fehler δ_1 zu erwarten ist. Aber unter je m_2 möglichen Fällen gibt es g_2 Fälle, in denen der Fehler δ_2 zu erwarten ist, folglich unter je $g_1 m_2$ möglichen Fällen gibt es $g_1 g_2$ Fälle, unter denen derselbe Fehler δ_2 zu erwarten ist. Mithin werden unter je $m_1 m_2$ möglichen Fällen $g_1 g_2$ Fälle vorkommen, in denen die Fehler δ_1 und δ_2 zugleich zu erwarten sind. Oder mit anderen Worten, die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Vorkommen der Fehler δ_1 und δ_2 ist gleich dem Produkte $\frac{g_1 g_2}{m_1 m_2}$ der Wahrscheinlichkeiten $\frac{g_1}{m_1}$ und $\frac{g_2}{m_2}$, welche den voneinander unabhängigen Fehlern δ_1 und δ_2, einzeln genommen, entsprechen. Dehnt man diese Schlußweise weiter auf drei, vier u. s. w. voneinander unabhängigen Fehler aus, so wird man allgemein als Ausdruck der Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Vorkommen dieser Fehler das Produkt derjenigen Wahrscheinlichkeiten erhalten, welche diesen Fehlern, einzeln genommen, entsprechen.

Es sei noch besonders bemerkt: Wenn die Wahrscheinlichkeiten mehrerer voneinander unabhängigen Ereignisse E_1, E_2, E_3 u. s. w. einzeln gegeben sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß irgend eines von diesen Ereignissen eintritt, gleich der Summe der den einzelnen Ereignissen zukommenden Wahrscheinlichkeiten, dagegen die Wahrscheinlichkeit, daß alle diese Ereignisse zugleich eintreten, gleich dem Produkte der erwähnten Wahrscheinlichkeiten.

Je größer diese Wahrscheinlichkeit ist, desto mehr Anspruch auf Geltung hat der angenommene Wert ξ und unter allen Annahmen wird diejenige die wahrscheinlichste sein, welche die durch 4) gegebene Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des resultierenden Fehlersystems zu einem Maximum macht, denn je größer die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlersystems, desto wahrscheinlicher ist dieses.

Nach der Methode von Gauß, die auf der Zugrundelegung der Hypothese vom arithmetischen Mittel beruht, erhält der fragliche Ausdruck seinen größten Wert, wenn man für ξ den Wert $x = \frac{l_1 + l_2 + \cdots\cdots + l_n}{n}$ setzt, wodurch dann δ_i den Wert λ_i annimmt.

Weil $(d\,\delta)^n$ ein konstanter Faktor ist, so muß das arithmetische Mittel das Produkt

$$\Omega = \varphi(\delta_1)\,\varphi(\delta_2)\;\cdots\cdots\;\varphi(\delta_n)$$

oder auch dessen Logarithmus

$$l\,\Omega = l\,\varphi(\delta_1) + l\,\varphi(\delta_2) + \cdots\cdots + l\,\varphi(\delta_n) =$$
$$= l\,\varphi(-l_1 + \xi) + l\,\varphi(-l_2 + \xi) + \cdots\cdots + l\,\varphi(-l_n + \xi)$$

zu einem Maximum machen. Es muß infolgedessen der Differentialquotient $\frac{d\,l\,\Omega}{d\,\xi}$ für $\xi = x$ gleich Null werden. Man hat also

$$\frac{\varphi'(-l_1 + \xi)}{\varphi(-l_1 + \xi)} + \frac{\varphi'(-l_2 + \xi)}{\varphi(-l_2 + \xi)} + \cdots\cdots + \frac{\varphi'(-l_n + \xi)}{\varphi(-l_n + \xi)} = 0,$$

oder auch

5) $$\frac{\varphi'(\delta_1)}{\varphi(\delta_1)} + \frac{\varphi'(\delta_2)}{\varphi(\delta_2)} + \cdots\cdots + \frac{\varphi'(\delta_n)}{\varphi(\delta_n)} = 0.$$

Durch Summierung der Gleichungen 3) erhält man mit Rücksicht auf 1)

$$\delta_1 + \delta_2 + \cdots\cdots + \delta_n = -(l_1 + l_2 + \cdots\cdots + l_n) + n\,\xi =$$
$$= -n\,x + n\,\xi = n(\xi - x),$$

welche Gleichung für $\xi = x$ in

6) $$\delta_1 + \delta_2 + \cdots\cdots + \delta_n = 0$$

übergeht. Hieraus ersieht man, daß mit der Annahme des arithmetischen Mittels den Beobachtungen Fehler (plausible oder scheinbare Fehler zum Unterschiede von den wahren) zugeschrieben werden, deren Summe jederzeit Null ist, die sich also untereinander aufheben.

Die Beziehungen 5) und 6) zwischen den an den Beobachtungen zurückbleibenden Fehlern müssen gleichzeitig bestehen. Die Gleichung 5) kann man auch in der Form schreiben

$$\frac{\varphi'(\delta_1)}{\delta_1\,\varphi(\delta_1)}\,\delta_1 + \frac{\varphi'(\delta_2)}{\delta_2\,\varphi(\delta_2)}\,\delta_2 + \cdots\cdots + \frac{\varphi'(\delta_n)}{\delta_n\,\varphi(\delta_n)}\,\delta_n = 0.$$

Man erkennt nun, daß die erwähnte Koexistenz nur dann unter allen Umständen möglich ist, wenn

$$7)\qquad \frac{\varphi'(\delta_1)}{\delta_1\,\varphi(\delta_1)} = \frac{\varphi'(\delta_2)}{\delta_2\,\varphi(\delta_2)} = \cdots\cdots = \frac{\varphi'(\delta_n)}{\delta_n\,\varphi(\delta_n)} = \text{Konstante},$$

oder allgemein, indem man irgend einen der Fehler mit δ bezeichnet, wenn

$$8)\qquad \frac{\varphi'(\delta)}{\delta\,\varphi(\delta)} = k,$$

wobei k eine Konstante bedeutet, denn dann hat man

$$9)\qquad \frac{\varphi'(\delta)}{\delta\,\varphi(\delta)}\,(\delta_1 + \delta_2 + \cdots\cdots + \delta_n) = 0.$$

Die Gleichung 8) kann unmittelbar zur Bestimmung der Funktion $\varphi(\delta)$ verwendet werden. Multipliziert man sie nämlich mit $d\delta$, so erhält man bei gleichzeitiger Berücksichtigung der Beziehung $d\,\varphi(\delta) = \varphi'(\delta)\,d\,\delta$

$$\frac{\varphi'(\delta)\,d\,\delta}{\varphi(\delta)} = \frac{d\,\varphi(\delta)}{\varphi(\delta)} = k\,\delta\,d\,\delta$$

und hieraus folgt durch Integration:

$$l\,\varphi(\delta) = \frac{1}{2}\,k\,\delta^2 + l\,c$$

oder

$$10)\qquad \varphi(\delta) = c\,e^{\frac{1}{2}k\,\delta^2},$$

wo c die Integrationskonstante und e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet, $e = 2{\cdot}7182818\ldots\ldots$

Berücksichtigt man, daß $\varphi(\delta)$ eine mit dem Wachsen von δ fallende Funktion sein soll, die für $\delta = 0$ ihr Maximum erreicht, so wird klar, daß k negativ sein muß. Setzt man also

$$\frac{1}{2}\,k = -\,h^2,$$

so wird

$$11)\qquad \varphi(\delta) = c\,e^{-\,h^2\,\delta^2}.$$

Bestimmung der Konstanten c.

Da es gewiß ist, daß jeder Fehler zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ liegen muß, die diesem Falle entsprechende Wahrscheinlichkeit demnach zur Gewißheit wird, also der Einheit gleich ist, so hat man

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\delta)\, d\delta = c \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\delta^2}\, d\delta = 1.$$

Setzt man $h\delta = t$, also $d\delta = \frac{dt}{h}$, so ergibt sich

$$\frac{c}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = 1.$$

Nun ist bekanntlich (siehe auch Punkt 5 dieses Abschnittes)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi} \quad \text{(Integral von Laplace)},$$

also

$$\frac{c}{h}\sqrt{\pi} = 1;$$

daraus folgt

12) $$c = \frac{h}{\sqrt{\pi}};$$

daher ist schließlich

13) $$\varphi(\delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\delta^2},$$

welche Gleichung das Fehlergesetz von Gauß ausdrückt. Die Funktion $\varphi(\delta)$ wird, wie bekannt, die Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion oder das Gesetz der Fehlerhäufigkeit genannt; man bezeichnet $\varphi(\delta)$ auch als die relative Häufigkeit des Fehlers δ.

Die Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion enthält eine unbestimmte, von der Art der Beobachtungen abhängige Konstante h. Die Ableitung hat die Beweiskraft, welche aus der Hypothese des arithmetischen Mittels entspringt. Daß das arithmetische Mittel der vorteilhafteste, insbesondere, daß es der wahrscheinlichste Wert sei, ist unbeweisbar; aber es lassen sich mannigfache innere und äußere Gründe anführen, welche für die Wahl dieses Wertes sprechen.

Man kann nun sagen: Die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler δ begangen werde, oder vielmehr, daß er zwischen δ und $\delta + d\delta$ liege, ist

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \delta^2} d\delta$$

man hat somit

$$\frac{\text{Zahl der Fehler zwischen } \delta \text{ und } \delta + d\delta}{\text{Gesamtzahl der Fehler}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \delta^2} d\delta.$$

Wie aus dem Gange der Ableitung der Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion hervorgeht, drückt diese Funktion streng genommen nicht das Gesetz der wahren Beobachtungsfehler, d. i. der Abweichungen der einzelnen Beobachtungen von dem wahren Werte der beobachteten Größe aus, sondern das Gesetz der Verteilung ihrer Abweichungen vom arithmetischen Mittel. Indessen ist sie von Gauß sowohl wie von späteren Autoritäten als das Gesetz der eigentlichen Beobachtungsfehler angesehen worden.

Man kann auf Grund der Gleichungen 5) und 6) auch auf folgende Art zur Kenntnis der Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion gelangen.

Setzt man $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \psi(z)$, so läßt sich der Inhalt der Gleichungen 5) und 6) derart aussprechen, daß die Summe der Werte der Funktion $\psi(z)$ verschwindet, wenn die Summe der zugehörigen Werte der Variabeln selbst Null ist, daß also

$$\psi(z_1) + \psi(z_2) + \cdots\cdots + \psi(z_n) = 0 \quad \text{ist,}$$

wenn
$$z_1 + z_2 + \cdots\cdots + z_n = 0.$$

Dies reicht, sofern die Anzahl der Größen $z_1, z_2, \ldots.$ mindestens drei ist, zur Feststellung der Form von $\psi(z)$ vollkommen aus.

Denn differentiiert man die beiden Gleichungen und subtrahiert die hiedurch entstandenen Gleichungen

$$\psi'(z_1)\,dz_1 + \psi'(z_2)\,dz_2 + \cdots\cdots + \psi'(z_n)\,dz_n = 0,$$
$$dz_1 + dz_2 + \cdots\cdots + dz_n = 0$$

voneinander, nachdem man die zweite mit einer unbekannten Konstanten k multipliziert hat, so erscheint in der so gefundenen Gleichung

$$[\psi'(z_1) - k]\,dz_1 + [\psi'(z_2) - k]\,dz_2 + \cdots\cdots + [\psi'(z_n) - k]\,dz_n = 0$$

die ursprüngliche Abhängigkeit der n Differentiale $dz_1, dz_2, \ldots\ldots, dz_n$ aufgehoben; daraus schließt man, daß allgemein

$$\psi'(z) = k,$$

daher

$$\psi(z) = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = kz + C.$$

Um die Integrationskonstante C zu bestimmen, suche man die Summe der Werte der Funktion $\psi(z)$; man findet

$$k(z_1 + z_2 + \cdots\cdots + z_n) + nC = 0.$$

Durch Vergleich dieser Gleichung mit $z_1 + z_2 + \cdots\cdots + z_n = 0$ folgt $C = 0$, so daß man schließlich hat

$$\psi(z) = kz.$$

Aus

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = kz$$

ergibt sich wieder

$$l\,\varphi(z) = \frac{1}{2}kz^2 + l\,c,$$

$$\varphi(z) = c\,e^{\frac{1}{2}kz^2} \text{ u. s. w.}$$

4. Geometrische Darstellung des Fehlergesetzes. Fehlergesetz- oder Fehlerwahrscheinlichkeitskurve.

Trägt man die Werte δ als Abszissen und die Funktionswerte $\varphi(\delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\delta^2}$ als Ordinaten auf, so erhält man Punkte der Fehlergesetz- oder Fehlerwahrscheinlichkeitskurve (Fig. 3); hiezu ist also die Kenntnis von h erforderlich. Wegen $\varphi(\delta) = \varphi(-\delta)$ ist die Kurve symmetrisch zur Ordinatenachse; weil die Ordinaten positiv bleiben, so liegt die Kurve gänzlich oberhalb der Abszissenachse. Die Ordinaten nehmen mit wachsender Abszisse fortwährend bis Null ab, welcher Wert erst für $\delta = \pm\infty$ erreicht wird; die Abszissenachse ist sonach eine Asymptote der Kurve. Die größte Ordinate erhält man für $\delta = 0$ und ihr Wert beträgt $\varphi(0) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$. Die Kurve besitzt Wendepunkte, worüber der zweite Differentialquotient $\varphi''(\delta)$ Aufschluß gibt. Aus

$$\varphi(\delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\delta^2}$$

folgt

$$\varphi'(\delta) = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}\,\delta\,e^{-h^2\delta^2},$$

$$\varphi''(\delta) = -\frac{2\,h^3}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\delta^2} + \frac{4\,h^5}{\sqrt{\pi}}\,\delta^2\,e^{-h^2\delta^2} =$$

$$= \frac{2\,h^3}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\delta^2}\,(2\,h^2\,\delta^2 - 1).$$

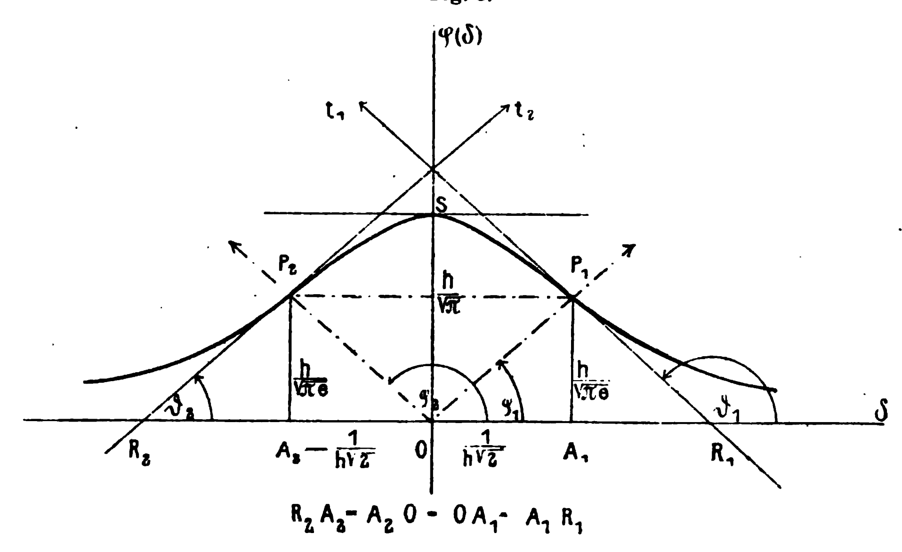
$\varphi''(\delta)$ gleich Null gesetzt, liefert die Wendepunktsabszissen. $\varphi''(\delta)$ kann aber nur dadurch gleich Null werden, daß

$$2\,h^2\,\delta^2 - 1 = 0;$$

hieraus folgt

$$\delta = \frac{1}{h\sqrt{2}};\ ^{*)}$$

Fig. 3.



hiemit erhält man für die Wendepunktsordinate

$$\varphi\left(\frac{1}{h\sqrt{2}}\right) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}} = \frac{h}{\sqrt{\pi\,e}}.$$

Die Fehlerwahrscheinlichkeitskurve besitzt also zwei Wendepunkte. Je größer die Ordinate des höchsten Punktes der Kurve ist, desto kleiner sind die Abszissen der Wendepunkte.

Für die Abszissen der Wendepunkte wechselt der zweite Differentialquotient $\varphi''(\delta)$ das Vorzeichen. Innerhalb des Intervalles von $-\frac{1}{h\sqrt{2}}$ bis $+\frac{1}{h\sqrt{2}}$ ist $\varphi''(\delta)$ negativ, das Kurvenstück $P_2\,S\,P_1$ (Fig. 3)

*) Wie im Punkte 4 des III. Abschnittes gezeigt werden wird, ist die Abszisse des Wendepunktes dem mittleren Fehler zahlengleich.

ist also nach abwärts gekrümmt; in den Intervallen $\frac{1}{h\sqrt{2}}$ bis $+\infty$ und $-\frac{1}{h\sqrt{2}}$ bis $-\infty$ ist die Fehlerwahrscheinlichkeitskurve nach aufwärts gekrümmt, weil für Abszissen in diesen Intervallen der zweite Differentialquotient $\varphi''(\delta)$ positiv wird.

Für die trigonometrische Tangente des Winkels der geometrischen Tangente im Wendepunkte P_1 erhält man mit Hilfe des ersten Differentialquotienten $\varphi'(\delta)$

$$tg\,\delta_1 = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{h\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{h^2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi e}} = \frac{h}{\sqrt{\pi e}} : -\frac{1}{h\sqrt{2}} = \frac{\varphi\left(\frac{1}{h\sqrt{2}}\right)}{-\frac{1}{h\sqrt{2}}}.$$

Man sieht, daß diese Tangente parallel ist dem Radiusvektor, welcher vom Ursprunge nach dem anderen Wendepunkte P_2 gezogen wird. Die Wendetangenten haben also die bemerkenswerte Eigenschaft, daß immer die eine parallel ist dem Vektor, welcher vom Ursprunge nach dem Berührungspunkte der anderen geht.

Für die ganze, beiderseits ins Unendliche sich erstreckende Fläche zwischen der Abszissenachse und der Fehlerwahrscheinlichkeitskurve hat man

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\delta)\,d\delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\delta^2}\,d\delta.$$

Setzt man $h\delta = t$ und berücksichtigt den Punkt 5 diese Abschnittes, so folgt

$$F = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 1.$$

Die Figur 4 stellt den Verlauf der Fehlerwahrscheinlichkeitskurven für zwei verschiedene Werte von h ($h_1 = 1$ und $h_2 = 2$) dar. Die Kurven schneiden sich in zwei zur Ordinatenachse symmetrisch liegenden Punkten P. Die Abszisse OA entspricht dem in beiden Beobachtungsreihen gleich wahrscheinlichen Fehler, dessen Wert wie folgt gefunden wird: Die Gleichungen der beiden Kurven lauten:

$$\varphi_1(\delta) = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2\delta^2}, \qquad \varphi_2(\delta) = \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2\delta^2}.$$

Für den Schnittpunkt ist $\varphi_1(\delta) = \varphi_2(\delta)$, somit erhält man dann durch Division der beiden Kurvengleichungen:

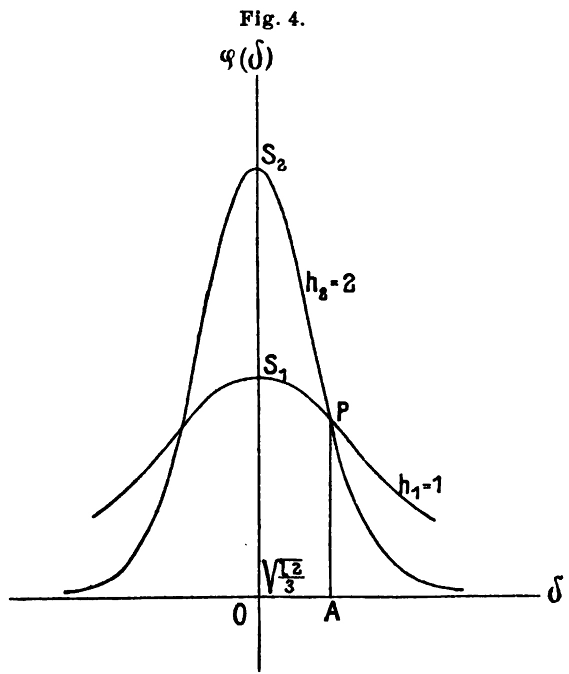
$$1 = \frac{h_1}{h_2} e^{-(h_1^2 - h_2^2)\delta^2}$$

und hieraus als gesuchten Fehlerwert:

$$\delta = \sqrt{\frac{l h_2 - l h_1}{h^2_2 - h^2_1}}.$$

In der genaueren Beobachtungsreihe sind die unter diesem Fehlerwerte liegenden Fehler wahrscheinlicher, die über ihm liegenden minder wahrscheinlich als in der ungenaueren Beobachtungsreihe.

Fig. 4.



Beispiel.

Die Kurve $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$, welche in rechtwinkeligen Koordinaten das Fehlergesetz veranschaulicht, ist symmetrisch zur y-Achse und hat die x-Achse zur Asymptote. Es wird also y wohl erst für $x = \infty$ Null, aber die Kurve nähert sich sehr rasch der x-Achse, so daß für ein etwas größeres x der Wert y schon sehr klein wird, wenn h auch nur gleich 1 genommen wird. Je größer h aber wird, desto rascher wird sich die Kurve der x-Achse nähern. So erhält man mit

$$h = 1, \quad y_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \text{ und } h = 2, \quad y_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-4x^2}$$

folgende Tabelle:

x	y_1	y_2
0·0	0·56419	1·12838
0·2	0·54207	0·96514
0·4	0·48077	0·59499
0·5	0·43939	0·41511
0·6	0·39362	0·26734
0·8	0·29749	0·08723
1·0	0·20755	0·02067
1·5	0·04946	0·00014
2·0	0·01033	0·0000001
∞	0	0

Aus der Tabelle ist ersichtlich, um wieviel rascher y_2 abnimmt als y_1.

Für die logarithmische Berechnung der Funktionswerte $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$ für beliebige Werte von h und x hat man, da $\log e = \log 2{\cdot}71828 \ldots = 0{\cdot}4342945 \ldots = a$ und $\log \sqrt{\pi} = 0{\cdot}2485749$ ist:

$$\log y = 0{\cdot}7514251 - 1 + \log h - a h^2 x^2.$$

5. Bestimmung des Integrals $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$. (Laplace.)

Durch eine besondere Untersuchung soll zuerst entschieden werden, ob das bestimmte Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

mit unendlichem Integrationsintervalle eine Bedeutung hat oder nicht. Schon aus dem Umstande, daß e^{-x^2} für ein beständig wachsendes x unendlich klein von höherer Ordnung wird als jede positive Potenz von $\frac{1}{x}$, kann der Schluß gezogen werden, daß das genannte Integral einen bestimmten Wert hat.

Der Grenzwert des Produktes $x^n e^{-x^2}$ für $\lim x = +\infty$ ist nämlich aus diesem Grunde offenbar Null (siehe die Anmerkung zum Punkt 8 des III. Abschnittes); es ist also, wenn K eine von Null verschiedene positive konstante Zahl bedeutet, von einer gewissen Stelle x_1 (> 0) an beständig $x^n e^{-x^2} < K$, somit

$$e^{-x^2} < \frac{K}{x^n};$$

daraus folgt, daß auch

$$\int_{x_1}^{x_2} e^{-x^2}\,dx < K\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x^n},\ \text{wobei}\ 0 < x_1 < x_2.$$

Ist nun $n > 1$, so konvergiert $\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x^n}$ für $\lim x_2 = +\infty$ beständig wachsend gegen $\frac{1}{(n-1)\,{x_1}^{n-1}}$, daher konvergiert auch das linksstehende, ebenfalls mit x_2 wachsende Integral $\int_{x_1}^{x_2} e^{-x^2}\,dx$ gegen eine bestimmte Grenze; deshalb gilt dies auch für

$$\lim_{x_2=+\infty}\int_0^{x_2} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{x_1} e^{-x^2}\,dx + \lim_{x_2=+\infty}\int_{x_1}^{x_2} e^{-x^2}\,dx.$$

Man kann eine obere Grenze für den fraglichen Wert des Integrals herstellen, wenn man das Integrationsintervall in die Teile 0 bis 1 und 1 bis $+\infty$ zerlegt; im ersten Teile ist e^{-x^2} beständig $\overline{\overline{<}}\,1$, folglich $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx < 1$; im zweiten Teile ist e^{-x^2} beständig $\overline{\overline{<}}\, x\,e^{-x^2}$, folglich

$$\int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx < \int_1^{\infty} x\,e^{-x^2}\,dx = -\lim_{x=+\infty}\frac{e^{-x^2}}{2} + \frac{1}{2e} = \frac{1}{2e},$$

so daß

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx < 1 + \frac{1}{2e}.$$

Um den Integralwert zu ermitteln, setze man

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Beachtet man, daß der Wert eines bestimmten Integrals nur von den Grenzen, nicht aber von der Bezeichnung der Veränderlichen abhängt, so ist auch

$$J = \int_0^{\infty} e^{-y^2}\,dy,$$

und somit durch Multiplikation

$$J^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dy.$$

Führt man mittels der Substitution

$$y = xu,$$

die neue Veränderliche u ein, in Bezug auf welche, wie man leicht sieht, die Integrationsgrenzen dieselben bleiben, so wird $dy = x\,du$ und

$$J^2 = \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-x^2(1+u^2)} x\,du = \int_0^\infty du \int_0^\infty e^{-x^2(1+u^2)} x\,dx.$$

Die Integration nach x kann ausgeführt werden; setzt man $x^2(1+u^2) = z$, so wird $x\,dx = \frac{dz}{2(1+u^2)}$ und

$$J^2 = \int_0^\infty \frac{du}{2(1+u^2)} \int_0^\infty e^{-z} dz.$$

Da

$$\int_0^\infty e^{-z} dz = -e^{-z} \Big|_0^\infty = 1,$$

so ist

$$J^2 = \int_0^\infty \frac{du}{2(1+u^2)} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} u \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4},$$

folglich

$$J = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Das Integral von Laplace kann auch mit Hilfe einer geometrischen Betrachtung ermittelt werden.

Fig. 5a.

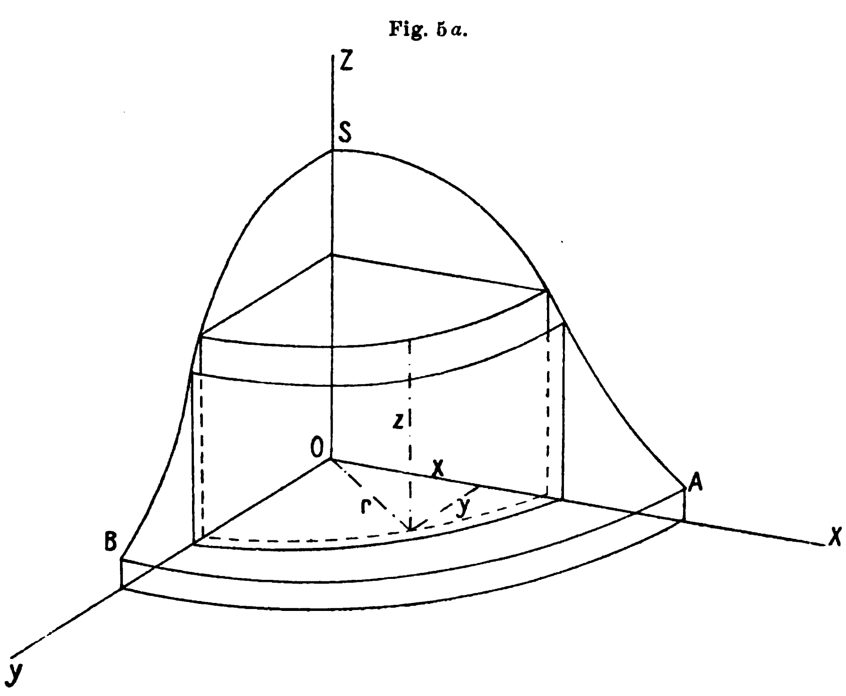
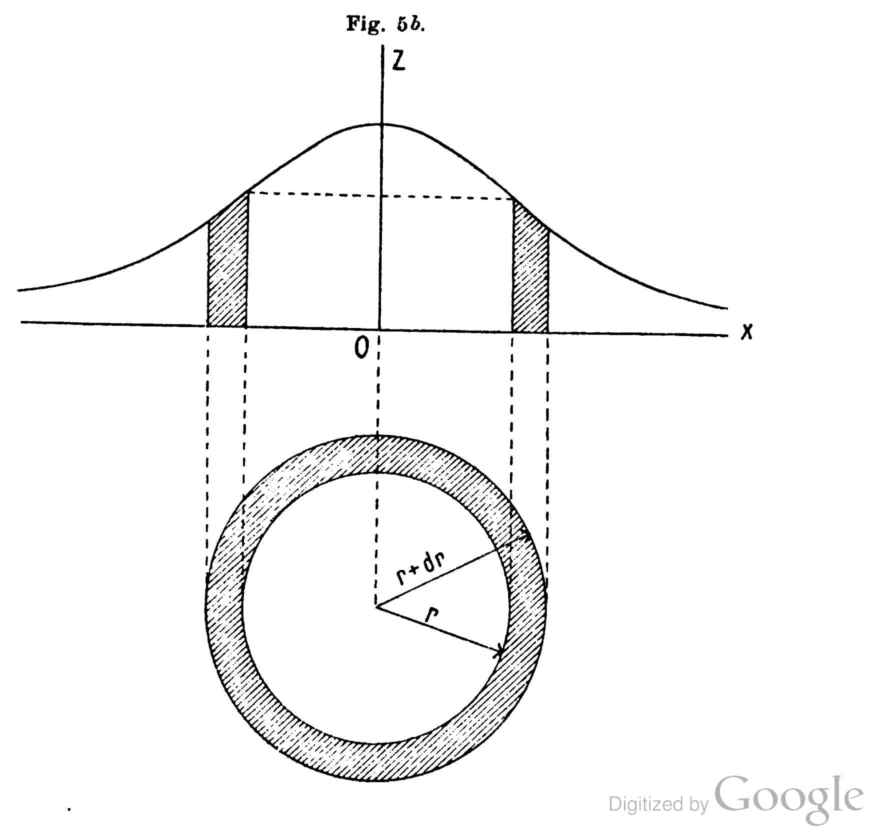


Fig. 5b.



In den Figuren 5*a* und 5*b* ist eine Umdrehungsfläche dargestellt, deren Gleichung lautet:

$$z = e^{-(x^2+y^2)} \text{ oder } z = e^{-r^2}.*)$$

Um das Volum zu bestimmen, welches zwischen der krummen Fläche und der xy-Ebene sich befindet, kann man zwei verschiedene Wege einschlagen.

1. Die Zerlegung in prismatische Elemente mit den Basisdimensionen dx, dy und der Höhe z gibt das Volumdifferential $dV = z\,dx\,dy$. Aus diesem findet man

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy.$$

Da, wie schon erwähnt, in einem bestimmten Integrale die Bezeichnung der ursprünglichen Veränderlichen auf den Wert des Integrals ohne Einfluß ist, kann man auch schreiben

1) $$V = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du\right]^2.$$

2. Es kann auch eine Zerlegung nach Zylinderelementen vorgenommen werden. Die Kreisringfläche in der xy-Ebene hat den Flächeninhalt $2\pi r\,dr$, demnach beträgt das Volum eines Hohlzylinders vom Halbmesser r, der Dicke dr und der Höhe z

$$dV = 2\pi r\,dr\,.\,z = 2\pi r e^{-r^2}\,dr;$$

daraus das gesamte Volum

$$V = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2}\,dr.$$

Nun ist

$$\int r e^{-r^2}\,dr = -\frac{1}{2} e^{-r^2} + C, \quad \text{also} \quad \int_0^{\infty} r e^{-r^2}\,dr = \frac{1}{2} \quad \text{und}$$

2) $$V = \pi.$$

---

*) Die Fläche entsteht durch Rotation der Kurve SA, welche die Gleichung $z = e^{-x^2}$ hat, um die z-Achse. Die xy-Ebene ist eine Asymptotenebene dieser Fläche, indem sich letztere glockenförmig über der xy-Ebene bis zum Punkte S ($x = y = 0$, $z = 1$) erhebt und immer flacher werdend sich der xy-Ebene nähert.

Die Vergleichung von 1) und 2) gibt wieder

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, d u = \sqrt{\pi}.$$

Man sieht zugleich, daß die ganze, beiderseits ins Unendliche sich erstreckende Fläche zwischen der x-Achse und der Kurve $y = e^{-x^2}$ den Inhalt

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, d x = \sqrt{\pi}$$

besitzt.

6. Ableitung des Fehlergesetzes nach Herschel.

Eine Ableitung des Fehlergesetzes, die nicht nur vermöge ihrer Einfachheit, sondern insbesondere auch deshalb einiges Interesse beansprucht, weil sie sich auf Betrachtungen stützt, welche der Natur des Gegenstandes fremd sind und mit der Raumanschauung eng zusammenhängen, hat **Herschel** gegeben.

Fig. 6.

Ein Stein wird aus einer Höhe geworfen in der Absicht, eine gegebene Marke zu treffen. Die Abweichung von dieser Marke ist der begangene Fehler.

Nun wird die erste Annahme gemacht, welche darin besteht, daß die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers nur abhängig sei von seiner Größe und nicht auch von der Richtung, nach welcher er erfolgte; damit ist ausgesprochen, daß positive und negative Fehler derselben Größe in ein und der nämlichen, durch die Marke gehenden Geraden gleich wahrscheinlich sind. Bezeichnet demnach r die Größe des Fehlers, so ist seine Wahrscheinlichkeit proportional einer **geraden** Funktion von r, etwa $f(r^2)$.

Dies allein reicht aber zur Bestimmung von $f(r^2)$ nicht aus. Es wird nun die folgende zweite Annahme gemacht. Denkt man sich durch die Marke O (Fig. 6) in der Ebene, auf welcher sie angebracht ist, ein rechtwinkeliges Achsenpaar $x O y$ gelegt und sind x, y die Koordinaten des Punktes, in welchem der Stein auffällt, so kann seine Abweichung r betrachtet werden als ein zusammengesetztes Ereignis, bestehend in dem Zusammentreffen der voneinander unabhängigen Abweichungen x, y in Richtung der Achsen $O x$, $O y$.

Die Richtigkeit dieser Annahme zugegeben, stellt $f(x^2)\,dx$ die Wahrscheinlichkeit einer zwischen den Grenzen x und $x+dx$ liegenden Abweichung parallel zur Ox-Achse dar, $f(y^2)\,dy$ die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung parallel zur Oy-Achse im Betrage von y bis $y+dy$, und $f(x^2)\,f(y^2)\,dx\,dy$ endlich drückt die Wahrscheinlichkeit aus, daß der Stein die Ebene innerhalb des Rechteckes $dx\,dy$ treffen werde, dessen dem Ursprung zunächst liegende Ecke die Koordinaten x, y hat. Da nun alle Abweichungen gleicher Größe dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzen, so bleibt dieser Ausdruck solange unverändert als x^2+y^2 einen konstanten Wert behält. Denkt man sich also das Rechteck so gelegt, daß seine der Marke O zunächstliegende Ecke die Koordinaten 0, $\sqrt{x^2+y^2}$ hat, so nimmt die darauf bezügliche Wahrscheinlichkeit den Ausdruck $f(0)f(x^2+y^2)\,dx\,dy$ an, und zur Bestimmung der unbekannten Funktion f ergibt sich die Gleichung

$$f(x^2)f(y^2)=f(0)f(x^2+y^2).$$

Differentiiert man dieselbe partiell in Bezug auf x^2, dann in Bezug auf y^2, so erhält man

$$f'_{x^2}(x^2)f(y^2)=f(0)f'_{x^2}(x^2+y^2),$$
$$f(x^2)f'_{y^2}(y^2)=f(0)f'_{y^2}(x^2+y^2);$$

es ist somit

$$f'_{x^2}(x^2)f(y^2)=f'_{y^2}(y^2)f(x^2),$$

woraus weiter

$$\frac{f'_{x^2}(x^2)}{f(x^2)}=\frac{f'_{y^2}(y^2)}{f(y^2)}$$

folgt. Dieser Beziehung zufolge ist $\frac{f'_{x^2}(x^2)}{f(x^2)}$ unabhängig von x^2. Bezeichnet demnach m eine Konstante, so darf man

$$\frac{f'_{x^2}(x^2)}{f(x^2)}=m$$

setzen. Die Integration gibt $l f(x^2)=m x^2+l A$ oder

$$f(x^2)=A\,e^{m x^2}.$$

Da der Wert von x notwendig zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ liegen muß, ist

$$A\int_{-\infty}^{\infty} e^{m x^2}\,dx=1,$$

die Konstante m muß daher negativ sein. Es ergibt sich dies auch aus der bekannten Tatsache, daß die Wahrscheinlichkeit eines positiven oder negativen Fehlers mit dessen Größe abnimmt. Setzt man

$m = -h^2$, so folgt, wenn gleichzeitig im Integral eine neue Veränderliche t mittels der Substitution $hx = t$ eingeführt wird,

$$A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2x^2}\,dx = A.\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = 1.$$

Da (siehe Punkt 5 dieses Abschnittes)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

gefunden wurde, ist

$$\frac{A}{h}\sqrt{\pi} = 1;$$

daraus folgt $A = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$, so daß sich schließlich ergibt

$$f(x^2) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2x^2}.$$

Die Annahme aber, auf welcher der Ansatz der zur Bestimmung von f führenden Gleichung

$$f(x^2)f(y^2) = f(0)f(x^2 + y^2)$$

beruht, läßt sich nicht rechtfertigen. Die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen zweier Ereignisse ist nur dann dem Produkte ihrer einfachen Wahrscheinlichkeiten gleich, wenn die Ereignisse voneinander unabhängig sind. Es müßte also, um die Berechtigung jener Gleichung darzutun, der Beweis geliefert werden, daß die relative Wahrscheinlichkeit einer Abweichung y parallel zur y Achse dieselbe bleibt, welchen Wert auch die Abweichung x in der anderen Achsenrichtung haben möge; hiefür ist aber kein Anhalt vorhanden, weder bei einem rechtwinkeligen noch bei einem schiefwinkeligen Achsenkreuz; die unmittelbare Anschauung spricht vielmehr dagegen. Näheres hierüber siehe „Theorie der Beobachtungsfehler von Emanuel Czuber", Seite 103, Punkt 43.

7. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler einer einzelnen Beobachtung zwischen den Grenzen $-a$ und $+a$ liege, oder daß der Fehler ohne Rücksicht auf sein Zeichen zwischen 0 und a liege, also die Grenze a nicht überschreite.

Die Wahrscheinlichkeit, daß δ zwischen zwei Grenzen a und b liegt, ist nach Punkt 1 dieses Abschnittes, wenn für die Fehler-

wahrscheinlichkeitsfunktion $\varphi(\delta)$ der gefundene Ausdruck
$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \delta^2} d\delta$ eingeführt wird:

$$\int_a^b \varphi(\delta)\, d\delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-h^2 \delta^2} d\delta,$$

folglich die Wahrscheinlichkeit, daß δ zwischen $-a$ und $+a$ gelegen sei

$$\int_{-a}^{+a} \varphi(\delta)\, d\delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{-h^2 \delta^2} d\delta$$

und da

$$\int_{-a}^{+a} e^{-h^2 \delta^2} d\delta = \int_{-a}^{0} e^{-h^2 \delta^2} d\delta + \int_{0}^{+a} e^{-h^2 \delta^2} d\delta =$$

$$= \int_{0}^{a} e^{-h^2 \delta^2} d\delta + \int_{0}^{a} e^{-h^2 \delta^2} d\delta = 2 \int_{0}^{a} e^{-h^2 \delta^2} d\delta,$$

so ist

$$\int_{-a}^{+a} \varphi(\delta)\, d\delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{-h^2 \delta^2} d\delta = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{a} e^{-h^2 \delta^2} d\delta$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Fehler die Größe a nicht überschreitet oder ohne Rücksicht auf sein Zeichen zwischen den Grenzen 0 und a liegt. Dieses Resultat war von vornherein zu erwarten; denn weil gleich große positive oder negative Fehler gleich wahrscheinlich sind, so sind die Wahrscheinlichkeiten zwischen $-a$ und Null einerseits und Null und $+a$ anderseits einander gleich.

Setzt man $h\delta = t$, so wird $h\, d\delta = dt$ und da sich

für $\delta = 0$	$t = 0,$
„ $\delta = a$	$t = ah$

ergibt, so folgt:

$$\int_{-a}^{+a} \varphi(\delta)\, d\delta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{ah} e^{-t^2} dt = \Phi(ah).$$

Bedeutet N die Gesamtzahl aller möglichen Fehler, dann kann man mit Hilfe des gefundenen Ausdruckes auch die Anzahl Z der zwischen 0 und a enthaltenen Fehler angeben.

Denn man hat

$$\frac{\text{Zahl der Fehler zwischen } -a \text{ und } +a}{\text{Gesamtzahl der Fehler}} = \frac{Z}{N} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah} e^{-t^2} dt = \Phi(ah);$$

daraus folgt somit

$$Z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah} e^{-t^2} dt \times N = \Phi(ah) \times N.$$

Der Wert $\Phi(ah)$ ergibt sich für die Argumente ah von 0 bis 4·8 aus der Tabelle I. Man hat z. B.

für $ah = 3$ $\Phi(ah) = 0{\cdot}9999779.$

Umgekehrt kann man mittels dieser Tabelle auch leicht ah finden, wenn $\Phi(ah)$ gegeben ist, d. i. bei bekanntem h die Fehlergrenze a, welche zu einer gegebenen Wahrscheinlichkeit $\Phi(ah)$ gehört. Über den Vorgang bei der Berechnung von $\Phi(ah)$ ist das Wesentlichste im Punkt 10 dieses Abschnittes enthalten.

Beispiel. Für $N = 1000$ und $h = 1$ ergibt sich mit Zuhilfenahme der erwähnten Tabelle, daß

zwischen 0 und 0·5	$1000 \times \Phi(ah) = 520$ Fehler,
„ 0 „ 1·0	843 „
„ 0 „ 2·0	995 „

u. s. w. liegen, daher gibt es

zwischen 0 und 0·5	520 Fehler,
„ 0·5 „ 1·0	$843 - 520 = 323$ „
„ 1·0 „ 2·0	$995 - 843 = 152$ „

u. s. w.

Man könnte den Einwand erheben, daß nach dem Fehlergesetze von Gauß Fehler aller Größen möglich sind, weil jedem δ ein endlicher Wert $\varphi(\delta)$ entspricht, während tatsächlich stets eine Grenze $\pm g$ vorhanden ist, über welche hinaus ein Fehler nicht mehr begangen wird. Der Umstand, daß jedem δ ein endlicher Wert $\varphi(\delta)$ entspricht, ist jedoch praktisch ohne Bedeutung, weil $\varphi(\delta)$ außerordentlich rasch abnimmt, wenn δ einigermaßen groß angenommen wird. So ist z. B., wenn $h = 1$ gesetzt wird:

für $\delta = 3$ $\varphi(\delta) = 0{\cdot}000\,069\,6,$
„ $\delta = 4$ $\varphi(\delta) = 0{\cdot}000\,000\,063\,5,$
„ $\delta = 5$ $\varphi(\delta) = 0{\cdot}000\,000\,000\,007\,8.$

Je größer h wird, desto rascher wird sich die Fehlerwahrscheinlichkeitskurve der Abszissenachse nähern.

Nimmt man die Fehlergrenze, welche nicht überschritten werden soll, entsprechend groß an, so wird die Wahrscheinlichkeit $\Phi(a h)$ hiefür sich von jenen Wahrscheinlichkeiten, welche größeren Fehlergrenzen entsprechen, um praktisch ganz belanglose Größen unterscheiden.

8. Maß der Präzision oder Maß der Genauigkeit. Definition der Genauigkeit.

Da der Ausdruck

$$\varphi(\delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \delta^2}$$

für alle Gattungen von Beobachtungen gilt, so werden sich die einzelnen Gattungen nur durch den ihnen zukommenden Wert der Konstante h unterscheiden können, deren Bedeutung sich aus folgender Betrachtung ergibt.

Man denke sich zwei Beobachtungsreihen: R_1 mit dem Parameterwert h_1 und R_2 mit dem Parameterwert h_2, wobei ausdrücklich $h_2 > h_1$ vorausgesetzt wird. Ferner denke man sich die beiden Fehlerwahrscheinlichkeitskurven

$$\varphi_1(\delta) = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 \delta^2}, \qquad \varphi_2(\delta) = \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 \delta^2}$$

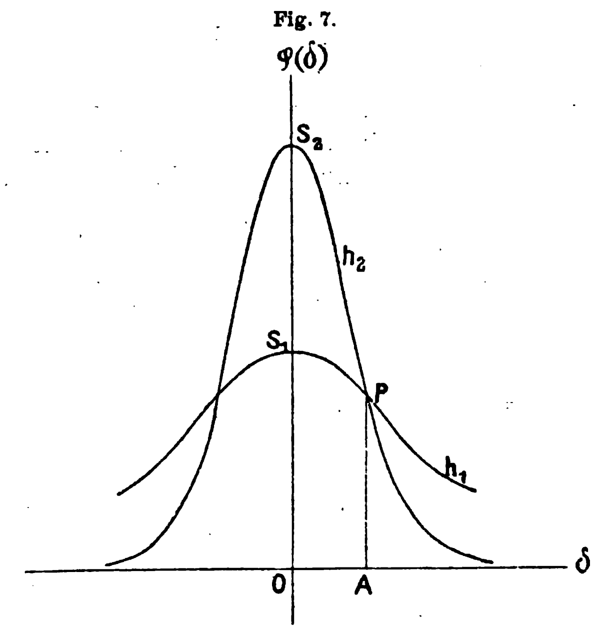
konstruiert. Die Fläche zwischen jeder Kurve und der Abszissenachse ist der Einheit gleich. Demnach kann die der Beobachtungsreihe R_2 zugehörige Kurve nicht immer über der zu R_1 gehörigen Fehlerwahrscheinlichkeitskurve liegen; die beiden Kurven müssen sich vielmehr schneiden (Fig. 7) und zwar nur in zwei Punkten, denn sonst müßte jede dieser Kurven mehr als zwei Inflexionspunkte (Wendepunkte) besitzen. Aus der Betrachtung der Figur folgt unmittelbar, daß bei der Beobachtungsreihe R_2 Fehler, die um Null bis zu einer gewissen Größe angeordnet sind, wahrscheinlicher, Fehler über diese Größe hinaus minder wahrscheinlich sind als bei der Beobachtungsreihe R_1. Dies berechtigt zur Einführung eines neuen Begriffes, nämlich den der Genauigkeit. Im vorliegenden Falle ist die Beobachtungsreihe R_2 die genauere. Die Genauigkeit hängt mit dem Parameter h zusammen. Je größer h nämlich wird, desto kleiner wird die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler von beträchtlicher Größe zu begehen, desto genauer oder präziser ist die

Beobachtungsreihe. Man nennt deshalb diesen Parameter nach dem Vorschlage von Gauß das Maß der Präzision oder das Maß der Genauigkeit.

Der Parameter h hängt somit von der jeweiligen Genauigkeit der Beobachtung ab, und es ist auch an sich ganz begreiflich, daß die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers δ durchaus nicht von der Größe δ und dem Intervall $d\,\delta$ allein abhängen kann, sondern man muß auch auf die Genauigkeit der Messungsart Rücksicht nehmen.

Man nennt eine Beobachtung k-mal genauer als eine andere, wenn bei der ersten die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen

Fig. 7.



den Grenzen δ und $\delta + d\,\delta$ ebenso groß ist wie die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen den Grenzen $k\,\delta$ und $k\,(\delta + d\,\delta)$ bei der zweiten.

Diese Definition entspricht vollkommen der üblichen Auffassung des Wortes Genauigkeit. Wenn bei der Messung einer Strecke ebenso häufig ein Fehler zwischen a und $a + 1$ Millimetern zu befürchten ist wie bei einer anderen Messung ein Fehler zwischen a und $a + 1$ Zentimetern, so wird man gewiß der ersten Messung eine zehnmal so große Genauigkeit nicht absprechen wollen als der zweiten.

Um die Genauigkeit einer Beobachtung, welche dem Gesetze $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \delta^2}$ folgt, durch eine Zahl auszudrücken, wählt man als Ein-

heit der Genauigkeit eine Beobachtung, bei welcher die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen den Grenzen δ und $\delta + d\delta$ gleich ist

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\delta^2} d\delta;$$

die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen $k\delta$ und $k(\delta + d\delta)$ ist bei dieser Gattung von Beobachtungen gleich $\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2\delta^2} d\delta$.

Die Ausdrücke

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\delta^2} d\delta \quad \text{und} \quad \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2\delta^2} d\delta$$

werden für beliebige Werte von δ übereinstimmen, wenn $k = h$; der Parameter h drückt also bei dieser Wahl der Einheit unmittelbar die Genauigkeit aus.

Die Wahrscheinlichkeit W, daß einer Beobachtung ein zwischen $-a$ und $+a$ liegender Fehler zukomme, ist gegeben durch

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah} e^{-t^2} dt = \Phi(ah).$$

Das Intervall $2a$ verengt sich bei festem W in demselben Verhältnisse als h wächst; je enger aber das Intervall, innerhalb dessen der Beobachtungsfehler mit gegebener Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist, für desto genauer wird man die Art der Beobachtungen erklären.

Nach Gauß setzt man die Genauigkeit G einer Beobachtungsreihe R dem Parameter h direkt proportional. Bezeichnet also G_1 die Genauigkeit der Beobachtungsreihe R_1 und G_2 die Genauigkeit der Beobachtungsreihe R_2, so hat man

$$G_1 : G_2 = h_1 : h_2.$$

Die Bedeutung von h ergibt sich auch aus folgender Betrachtung: In einer durch h_1 charakterisierten Beobachtungsreihe ist die Wahrscheinlichkeit der Fehlergrenze a_1 gleich

$$\Phi(a_1 h_1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a_1 h_1} e^{-t^2} dt;$$

in einer anderen durch h_2 gekennzeichneten Beobachtungsreihe hat die Fehlergrenze a_2 die Wahrscheinlichkeit

$$\Phi(a_2 h_2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a_2 h_2} e^{-t^2} dt;$$

für $\Phi(a_1 h_1) = \Phi(a_2 h_2)$ ist

$$a_1 h_1 = a_2 h_2,$$

wobei dann a_1 und a_2 diejenigen Fehler sind, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit nicht überschritten werden. Man ersieht aus der letzten Gleichung: je größer das Maß der Präzision ist, desto kleiner ist die Fehlergrenze, welche von den Beobachtungsfehlern mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit nicht überschritten wird. Aus $a_1 h_1 = a_2 h_2$ ergibt sich ferner: $h_1 : h_2 = a_2 : a_1$, d. h. gleichwahrscheinliche Fehlergrenzen aus zwei Beobachtungsreihen sind den betreffenden Präzisionsmaßzahlen umgekehrt proportioniert.

Bezeichnet man die besonderen Fehlergrenzen, welche der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ entsprechen, mit r_1 und r_2, so hat man auch $h_1 : h_2 = r_2 : r_1$. Diese besonderen Fehlergrenzen heißen wahrscheinliche Fehler. Man kann somit sagen: Die wahrscheinlichen Fehler zweier Beobachtungsreihen sind ebenfalls den Präzisionsmaßzahlen umgekehrt proportioniert.

Der wahrscheinliche Fehler wird im nächsten Abschnitte noch eingehender untersucht werden.

Außer dem Maße der Präzision gibt es, wie im folgenden Abschnitte gezeigt werden wird, noch andere Maße zur Beurteilung der Genauigkeit von Beobachtungen. Man kann, streng genommen, unbegrenzt viele Genauigkeitsmaße, und zwar aus den Fehlern selbst, konstruieren. Dabei wird es aber, von anderen Gesichtspunkten abgesehen, wesentlich auf den Grad der Leichtigkeit der Handhabung und wirklichen Ausführung ankommen.

Nach dieser Richtung hin haben sich besonders drei Genauigkeitsmaße eingebürgert: der durchschnittliche Fehler, der mittlere Fehler und der wahrscheinliche Fehler, welche im folgenden Abschnitte näher betrachtet werden sollen.

Aus $\varphi(\delta)\, d\delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \delta^2}\, d\delta$ erhält man die Wahrscheinlichkeit, den Fehler gleich Null zu begehen, d. h. ein fehlerfreies Beobachtungsresultat zu erhalten (gleichbedeutend mit der Forderung, daß ein Fehler zwischen den Grenzen 0 und $d\delta$ eingeschlossen ist), mit

$$\varphi(0)\, d\delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, d\delta.$$

Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Beobachtung den Fehler gleich Null zu begehen, ist somit der Größe h proportional; je größer

h ist, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei einer Beobachtung der Fehler Null auftrete.

Bei irgend einer Beobachtungsart, welcher ein bestimmter Wert von h zukommt, verhält sich die Wahrscheinlichkeit den Fehler gleich Null zu begehen, zur Wahrscheinlichkeit den Fehler gleich δ zu begehen, wie $\varphi(0):\varphi(\delta)$, d. i. wie $1:e^{-h^2\delta^2}$. Hieraus folgt nun zunächst wieder die bereits erkannte Bedeutung von h; denn je größer h ist, desto kleiner wird $e^{-h^2\delta^2}$, also auch die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler gleich δ zu begehen im Vergleiche zu der Wahrscheinlichkeit einen Fehler gleich Null zu erhalten, um so genauer müssen also die Beobachtungen sein. Überdies zieht man daraus noch den folgenden Schluß: Hat man für eine gewisse Gattung von Beobachtungen auf irgend eine Weise gefunden, daß die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers gleich Null zur Wahrscheinlichkeit eines Fehlers gleich δ sich verhalte, wie $1:e^{-q\delta^2}$, so ist für diese Gattung von Beobachtungen das Maß der Präzision $h=\sqrt{q}$ zu setzen.

Aus der Formel $\varphi(\delta)\,d\delta=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\delta^2}d\delta$ folgt, weil $\varphi(\delta)\,d\delta$ eine Zahl ist, daß die Dimension von h reziprok der Dimension von $d\delta$ ist, welche Größe den Elementarzuwachs einer Länge, eines Winkels u. s. w. darstellt.

9. Bestimmung des Maßes der Präzision, d. i. des Parameters *h*.*)

In den vorhergehenden Untersuchungen wurde die Bedeutung des Parameters h in der Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion hervorgehoben und gezeigt, daß er über die Genauigkeit der Beobachtungen Aufschluß zu geben vermag; danach kann dieser Parameter nur a posteriori aus den Untersuchungsergebnissen der Beobachtungsreihe bestimmt werden.

Bei der Bestimmung des Präzisionsmaßes h sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die wahren Fehler vorausgesetzt werden oder nur die plausiblen oder scheinbaren Fehler, nämlich die Unterschiede zwischen den einzelnen Beobachtungen und dem aus ihnen für die beobachtete Größe abgeleiteten Resultate.

In diesem Punkte soll nur der erste Fall vorgeführt werden; der zweite, für die Praxis wichtigere Fall, gründet sich auf den ersten und soll erst später behandelt werden.

---

*) Vergleiche auch Punkt 9 des IV. Abschnittes.

Bei n wirklich ausgeführten Beobachtungen seien die wahren Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_n$ begangen worden und es werde angenommen, daß dieselben einem Gesetze von der Form

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$$

folgen, in welchem der Parameter h noch unbekannt ist.

Die Wahrscheinlichkeiten, daß die Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_n$ entstehen, sind beziehungsweise

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon_1^2} d\varepsilon, \quad \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon_2^2} d\varepsilon, \quad \ldots\ldots\ldots, \quad \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon_n^2} d\varepsilon.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_n$ bei einer Beobachtungsreihe zusammentreffen, ist das Produkt aller Einzelwahrscheinlichkeiten und somit gegeben durch

$$W = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2 \varepsilon_1^2 - h^2 \varepsilon_2^2 - \ldots\ldots - h^2 \varepsilon_n^2} (d\varepsilon)^n, \quad \text{oder}$$

$$W = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2 [\varepsilon\varepsilon]} (d\varepsilon)^n,$$

wobei mit $[\varepsilon\varepsilon]$ die Summe $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots\ldots + \varepsilon_n^2$ bezeichnet ist.*)

Da nun die Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_n$ wirklich eingetreten und folglich einer Änderung nicht fähig sind, so hängt diese Wahrscheinlichkeit nur noch von dem Werte h ab und es wird jener Wert von h der wahrscheinlichste sein, für welchen die Wahrscheinlichkeit W des Zusammentreffens der wirklich eingetretenen Beobachtungsfehler ein Maximum wird. Dies gibt die Bedingung $\frac{dW}{dh} = 0$, oder

$$n h^{n-1} e^{-h^2 [\varepsilon\varepsilon]} - 2 h^n e^{-h^2 [\varepsilon\varepsilon]} h [\varepsilon\varepsilon] = 0, \quad \text{d. i.}$$
$$n - 2h^2 [\varepsilon\varepsilon] = 0;$$

hieraus folgt nun

$$h = \sqrt{\frac{n}{2[\varepsilon\varepsilon]}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{[\varepsilon\varepsilon]}}.$$

Aus der gefundenen Bedingungsgleichung für das durch h hervorzubringende Maximum erhält man auch

*) Bei dieser Gelegenheit sei erinnert, daß in dem Ausdrucke $\frac{d^n y}{dx^n}$ der Exponent von d die wiederholte Operation des Differentiierens anzeigt, während der Exponent von x sich auf die Größe dx bezieht und deren Potenz angibt.

$$\frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n} = \frac{1}{2\,h^2};$$

eine charakteristische Beziehung. Im Punkte 8 des nächsten Abschnittes erscheint nämlich der sogenannte mittlere Fehler μ einer Beobachtungsreihe definiert durch $\mu = \sqrt{\frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n}}$, so daß man auch schreiben kann

$$\mu^2 = \frac{1}{2\,h^2},$$

was hier nur vorläufig bemerkt werden möge.

10. Berechnung des Integrals $\Phi(a\,h) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a\,h} e^{-t^2}\,d\,t.$

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers zwischen den Grenzen $-a$ und $+a$ ist gegeben durch

$$1) \qquad \Phi(a\,h) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a\,h} e^{-t^2}\,d\,t.$$

Um dieses Integral auszurechnen, soll die Exponentialfunktion in eine Reihe entwickelt und sodann gliedweise integriert werden. Es ist für alle endlichen Werte der Veränderlichen x

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots;$$

dies gibt für $x = -t^2$

$$e^{-t^2} = 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \cdots\cdots;$$

hieraus folgt durch Integration zwischen den Grenzen 0 bis T

$$2) \qquad \int_0^T e^{-t^2}\,d\,t = T - \frac{T^3}{3\,.\,1!} + \frac{T^5}{5\,.\,2!} - \frac{T^7}{7\,.\,3!} + \frac{T^9}{9\,.\,4!} - \cdots\cdots$$

Die Reihe 2) konvergiert für endliche Werte von T jedenfalls, denn es ist der Quotient q eines Gliedes zu dem unmittelbar vorhergehenden, wenn man bis $n!$ im Nenner fortgeht:

$$q = \frac{(2\,n-1)\,T^2}{(2\,n+1)\,n}.$$

Da die Reihe abwechselnd positive und negative Glieder hat, so genügt es für die Konvergenz, wenn von irgend welcher Stelle

an immer $q < 1$ wird; dieses ist aber für jeden endlichen Wert von T der Fall, wenn man nur die Reihe weit genug fortsetzt. Allerdings muß man für größere Werte T sehr viele Glieder nehmen, um nur überhaupt an den Beginn des Abnehmens zu gelangen; doch genügt es, hier nur die theoretische Möglichkeit der Rechnung mittels der Reihe 2) darzutun.

Mit Hilfe von 1) und 2) erhält man nun für die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler zwischen den Grenzen $-a$ und $a+$ liegt,

$$3)\quad \Phi(a\,h) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[a\,h - \frac{(a\,h)^3}{3\,.\,1!} + \frac{(a\,h)^5}{5\,.\,2!} - \frac{(a\,h)^7}{7\,.\,3!} + \frac{(a\,h)^9}{9\,.\,4!} - \cdots\cdots\right].$$

Für $a\,h = 0{\cdot}1$ beispielsweise ergibt sich hieraus, wenn man mit dem Gliede mit der 5. Potenz von $a\,h$ abbricht, weil die folgenden auf die 6. Dezimalstelle ohne Einfluß sind:

$$\Phi(0{\cdot}1) = 1{\cdot}12838.\,(0{\cdot}100000 - 0{\cdot}000333 + 0{\cdot}000001) = 0{\cdot}112463.$$

Wegen der großen Bedeutung, welche das Integral 1) sonst auch für die Praxis hat, sind die Werte desselben für, nach konstanten Differenzen fortschreitenden Werte des Arguments $a\,h$ berechnet und in Tabellen eingetragen; Hauptzweck dieser Tabellen ist, für einen gegebenen Argumentenwert den Funktionswert zu finden, wobei eventuell vom Interpolieren Gebrauch gemacht werden muß. Die Tabelle I, welche dem Werke „Theorie der Beobachtungsfehler von Czuber" entnommen wurde, gibt die Integralwerte $\Phi(a\,h)$. Eine ausführliche Tabelle dieser Werte gab schon Encke im Berliner Astronomischen Jahrbuch für 1834.

Aus dem Verlaufe der Integralwerte ist zu entnehmen, daß von $a\,h = 2{\cdot}00$ angefangen der Wert der Funktion $\Phi(ah)$ praktisch der Einheit gleichgesetzt werden kann, so daß für eine, durch einen bestimmten Wert h charakterisierte Beobachtungsart der größte praktisch mögliche Fehler ε_{max} aus der Gleichung $\varepsilon_{max}\,h = 2$ mit $\varepsilon_{max} = \frac{2}{h}$ gefunden wird, d. h. praktisch genommen sind 100%, also sämtliche Fehler einer Beobachtungsart kleiner als dieser Fehler ε_{max}.

Die Prozentzahlen der Fehler, die kleiner sind als eine bestimmte Fehlergrenze a, werden erhalten, indem in den Vertikalreihen $\Phi(a\,h)$ der Dezimalpunkt um 2 Stellen rechts gerückt wird.

Nachstehend ist ein Auszug der Tabelle I gegeben:

ah	$\Phi(ah)$	ah	$\Phi(ah)$	ah	$\Phi(ah)$	ah	$\Phi(ah)$
0·0	0·00000	1·0	0·84270	2·0	0·99532	3·0	0·99997 79
0·1	0·11246	1·1	0·88020	2·1	0·99702	3·1	0·99998 84
0·2	0·22270	1·2	0·91031	2·2	0·99814	3·2	0·99999 40
0·3	0·32863	1·3	0·93401	2·3	0·99886	3·3	0·99999 69
0·4	0·42839	1·4	0·95229	2·4	0·99931	3·4	0·99999 85
0·47694	0·5						
0·5	0·52050	1·5	0·96611	2·5	0·99959	3·5	0·99999 93
0·6	0·60386	1·6	0·97635	2·6	0·99976	3·6	0·99999 96
0·7	0·67780	1·7	0·98379	2·7	0·99987	3·7	0·99999 98
0·8	0·74210	1·8	0·98909	2·8	0·99992	3·8	0·99999 99
0·9	0·79691	1·9	0·99279	2·9	0·99996	∞	1

In der vorstehenden kleinen Tabelle erscheint der Wert für $ah = 0·47694$ besonders hervorgehoben; es ist derjenige, welcher zu $\Phi(ah) = 0·5 = \frac{1}{2}$ gehört. Die dem Wahrscheinlichkeitswerte $\frac{1}{2}$ entsprechende Fehlergrenze wurde bereits im Punkte 8 dieses Abschnittes als der wahrscheinliche Fehler bezeichnet. Der Wert 0·47694 oder genauer 0·476 936 2762 wird im nächsten Abschnitte näher in Betracht gezogen werden; an dieser Stelle sei von demselben nur gesagt, daß er in die Reihe 3) eingesetzt, wie jeder andere das zugehörige $\Phi(ah)$ zu berechnen gestattet, und zwar wird die Berechnung $\Phi(ah) = 0·5$ geben.

Die Tabelle I gibt, wie bereits erwähnt, für fortschreitende Werte von ah die zugehörigen Werte des Integrals $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{ah} e^{-t^2}\,dt$. Man hat sonach für jeden bestimmten Fall der Anwendungen nur nötig, die sämtlichen Werte von ah durch den besonderen konstanten Wert h zu dividieren, um die Werte des genannten Integrals durch die fortschreitenden Werte von a ausgedrückt zu erhalten.

Die Tabelle I gilt unmittelbar für den Fall, wo das Maß der Präzision gegebener Beobachtungen, nämlich h, den Wert 1 besitzt. Sie liefert z. B. für die Wahrscheinlichkeit, daß der Beobachtungsfehler absolut genommen den Wert 0·1 nicht überschreite, auf drei Dezimalstellen abgekürzt, die Zahl 0·112; für die Wahrscheinlichkeit, daß der Beobachtungsfehler ebenso den Wert 0·2 nicht überschreite,

die Zahl 0·223 u. s. w. Mit anderen Worten, man darf erwarten, daß bei Beobachtungen, denen das Maß der Präzision $h = 1$ entspricht, unter je 1000 Beobachtungsfehlern 112 zwischen $-0{\cdot}1$ und $0{\cdot}1$ fallen; 223 zwischen $-0{\cdot}2$ und $0{\cdot}2$ u. s. w.

Wenn h nicht den Wert 1 hat, so ist hier überall an die Stelle von 0·1, 0·2 u. s. w. beziehungsweise zu setzen $\frac{0{\cdot}1}{h}$, $\frac{0{\cdot}2}{h}$ u. s. w.

III. Abschnitt.

Genauigkeitsmaße.

1. Der durchschnittliche Fehler (Durchschnittsfehler).

Angenommen, man hätte eine Anzahl von Beobachtungen einer und derselben unbekannten Größe X gemacht und hätte aus diesen Beobachtungen die Werte $l_1, l_2, l_3, \ldots\ldots, l_n$ erhalten; letztere sind voneinander verschieden, obwohl sie sich auf eine und dieselbe Größe beziehen.

Die den Beobachtungen anhaftenden wahren Fehler sind:

$$\begin{aligned} -l_1 + X &= \varepsilon_1, \\ -l_2 + X &= \varepsilon_2, \\ -l_3 + X &= \varepsilon_3, \\ &\vdots \\ -l_n + X &= \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Das arithmetische Mittel aus allen diesen wahren Fehlern, diese sämtlich mit positivem Zeichen genommen, heißt der durchschnittliche Fehler (Durchschnittsfehler).

Bezeichnet man denselben mit ϑ, so ist

$$1) \qquad \vartheta = \frac{[|\varepsilon|]}{n}.$$

Hiebei wurde $|\varepsilon|$ geschrieben, um anzudeuten, daß von der Zahl ε, welche positiv oder negativ sein kann, bloß der absolute Betrag gemeint ist. Die eckige Klammer soll, wie bereits erwähnt, hier und im folgenden als Summenzeichen für gleichartige Größen zur Verwendung kommen.

Dieser Ausdruck für ϑ bedeutet aber keinen strengen Wert für diese Größe, weil ihm nur eine beschränkte Zahl von Beobachtungen zu Grunde liegt.

Es frägt sich, welcher Grenze strebt ϑ zu, wenn die Zahl der Beobachtungen beständig wächst, wenn also statt n eine sehr große Zahl N von Beobachtungen ausgeführt wird. Betrachtet man das Intervall von ε bis $\varepsilon + d\varepsilon$, so wird auch in dieses eine gewisse Zahl von Fehlern fallen; diese Anzahl sei z_ε. Die Fehler innerhalb dieses engen Intervalles können als gleich angesehen werden, denn sie unterscheiden sich höchstens um $d\varepsilon$ voneinander.

Die Summe der in dem betrachteten Intervall liegenden Fehler beträgt demnach $z_\varepsilon . |\varepsilon|$. Führt man dieses Verfahren in allen Intervallen aus, so bekommt man als absolute Summe aller Fehler $\Sigma z_\varepsilon |\varepsilon|$. Die Summierung erstreckt sich über das ganze Fehlergebiet und $|\varepsilon|$ stellt immer nur den absoluten Betrag des Fehlers ε vor.

Es ist also

2) $$\vartheta = \frac{\Sigma z_\varepsilon |\varepsilon|}{N} = \Sigma \frac{z_\varepsilon}{N} |\varepsilon|,$$

worin $\frac{z_\varepsilon}{N}$ die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, daß der bei einer Beobachtung begangene Fehler in das Intervall von ε bis $\varepsilon + d\varepsilon$ falle; demnach ist, wenn die Fehler das Gesetz $\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$ beobachten, $\frac{z_\varepsilon}{N} = \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon$. Setzt man diesen Wert in 2) ein, so erhält man

3) $$\vartheta = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varepsilon| \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varepsilon| e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon.$$

Es sei hier auf die Verschiedenheit der Werte der beiden Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varepsilon| e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon\, e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon$$

aufmerksam gemacht. Da $|\varepsilon| e^{-h^2\varepsilon^2}$ eine **gerade Funktion***) ist,

*) Wenn $f(x)$ eine **gerade Funktion** ist, also $f(-x) = f(x)$, so hat man

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{+a} f(x)\, dx \quad \text{und weil für } x = -t$$

$$\int_{-a}^{0} f(x)\, dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\, dt = \int_{0}^{a} f(x)\, dx, \quad \text{so folgt:}$$

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx$$

hat man

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varepsilon| e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = 2\int_{0}^{+\infty} \varepsilon e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon$$

und daher

$$\vartheta = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \varepsilon e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon.$$

Weil hingegen $\varepsilon e^{-h^2 \varepsilon^2}$ eine ungerade Funktion*) ist, muß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = 0$$

sein.

Zu der Gleichung 3) gelangt man auch wie folgt: Die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler ε begangen werde, oder vielmehr, daß er zwischen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ liege, ist

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon.$$

Nach der Definition dieser Wahrscheinlichkeit hat man aber

$$\frac{\text{Zahl der Fehler zwischen } \varepsilon \text{ und } \varepsilon + d\varepsilon}{\text{Gesamtzahl der Fehler}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon.$$

Multipliziert man beide Seiten mit $|\varepsilon|$, so hat man

$$\frac{\text{Summe der absoluten Beträge der Fehler zwischen } \varepsilon \text{ und } \varepsilon + d\varepsilon}{\text{Gesamtzahl der Fehler}} =$$

$$= |\varepsilon| \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon;$$

integriert man endlich von $-\infty$ bis $+\infty$, so ergibt sich

*) Wenn $f(x)$ eine ungerade Funktion ist, also $f(-x) = -f(x)$, so hat man

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+a} f(x)\,dx \qquad \text{und weil für } x = -t$$

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx,$$

so folgt:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0.$$

$$\frac{\text{Summe der absoluten Beträge aller Fehler}}{\text{Gesamtzahl der Fehler}} =$$

$$= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varepsilon| e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \vartheta.$$

2. Bestimmung des Integrals $\int_0^\infty \varepsilon e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon$.

Führt man eine neue Veränderliche mittels der Gleichung $h\varepsilon = t$ ein, so hat man, da $\varepsilon = \frac{t}{h}$, $d\varepsilon = \frac{dt}{h}$ ist,

$$\int_0^\infty \varepsilon e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \int_0^\infty \frac{t}{h} e^{-t^2} \frac{dt}{h} = \frac{1}{h^2} \int_0^\infty t e^{-t^2} dt$$

und wegen

$$\int t e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} e^{-t^2} + C$$

folgt

$$\int_0^\infty t e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}.$$

Man erhält daher für den durchschnittlichen Fehler

$$\vartheta = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} = \frac{0{\cdot}56419}{h}.$$

Hiernach ist der Durchschnittsfehler sowohl dem Präzisionsmaß als auch (nach der im Punkte 8 des II. Abschnittes getroffenen Festsetzung) der Genauigkeit der Beobachtungen umgekehrt proportional.

Bei bekanntem ϑ gibt die letzte Formel ein Mittel zur Bestimmung des Präzisionsmaßes.

3. Der mittlere Fehler.

Der mittlere Fehler ist nach Gauß die Quadratwurzel aus dem arithmetischen Mittel der wahren Fehlerquadrate.

Die den Beobachtungen anhaftenden wahren Fehler sind ausgedrückt durch:

$$-l_1+X=\varepsilon_1,$$
$$-l_2+X=\varepsilon_2,$$
$$-l_3+X=\varepsilon_3,$$
$$\vdots$$
$$-l_n+X=\varepsilon_n.$$

Bildet man nun die Quadrate dieser wahren Fehler, für welche die Gültigkeit des Fehlergesetzes $\varphi(\varepsilon)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}$ vorausgesetzt wird, sodann die Summe der Fehlerquadrate, aus dieser Summe den Durchschnitt, zieht endlich aus dem Durchschnitt die Quadratwurzel, so erhält man den mittleren Fehler

$$\mu=\sqrt{\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\cdots\cdots+\varepsilon_n^2}{n}}.$$

Setzt man nach Gauß der Kürze wegen

$$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\cdots\cdots+\varepsilon_n^2=[\varepsilon\,\varepsilon],$$

so ist auch

1) $$\mu=\sqrt{\frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n}}.$$

Dieser Ausdruck für μ bedeutet ebenfalls keinen strengen Wert für diese Größe, weil ihm nur eine beschränkte Zahl von Beobachtungen zu Grunde liegt.

Es kann nun wieder die Frage nach der Grenze aufgeworfen werden, welcher μ zustrebt, wenn die Zahl der Beobachtungen beständig wächst, wenn also statt n eine sehr große Zahl N von Beobachtungen ausgeführt wird. In einer solchen Beobachtungsreihe werden Fehler aller Grade vorkommen und es wird sich, je größer N ist, die Verteilung der Fehler immer mehr dem Fehlergesetze nähern. Ordnet man diese Fehler, von dem, im absoluten Sinne genommen, größten negativen Fehler beginnend gegen Null zum größten positiven Fehler und betrachtet das Intervall von ε bis $\varepsilon+d\,\varepsilon$, so wird auch in dieses Intervall eine gewisse Zahl von Fehlern fallen; diese Anzahl sei z_ε. Die Fehler innerhalb dieses engen Intervalles können als gleich angesehen werden, denn sie unterscheiden sich höchstens um $d\,\varepsilon$ voneinander.

Die Summe der Quadrate der in dem betrachteten Intervalle liegenden Fehler beträgt demnach $z_\varepsilon\,.\,\varepsilon^2$.

Führt man dieses Verfahren in allen Intervallen aus, so bekommt man als Summe der Quadrate aller Fehler $\Sigma z_\varepsilon \varepsilon^2$. Die Summierung erstreckt sich über das ganze Fehlergebiet.

Das Quadrat des mittleren Fehlers beträgt somit

$$2) \qquad \mu^2 = \frac{\Sigma z_\varepsilon \varepsilon^2}{N} = \Sigma \frac{z_\varepsilon}{N} \varepsilon^2.$$

Der Bruch $\frac{z_\varepsilon}{N}$ hat folgende Bedeutung: N ist die Zahl aller Beobachtungen, z_ε ist die Zahl jener Fehler, welche ins betrachtete Intervall fallen; infolgedessen drückt der Bruch die Wahrscheinlichkeit aus, daß der bei einer Beobachtung begangene Fehler in dieses Intervall falle und es ist somit

$$3) \qquad \frac{z_\varepsilon}{N} = \varphi(\varepsilon)\, d\,\varepsilon.$$

Setzt man diesen Wert von $\frac{z_\varepsilon}{N}$ in 2) ein und nimmt, um alle möglichen Fehler zu umfassen, die Summe von $-\infty$ bis $+\infty$, so wird

$$4) \qquad \mu^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon)\, d\,\varepsilon.$$

Führt man in 4) für $\varphi(\varepsilon)$ den Wert

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$$

ein, so ergibt sich

$$5) \qquad \mu^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 e^{-h^2 \varepsilon^2} d\,\varepsilon.$$

Zu der Gleichung 5) gelangt man auch hier auf folgendem Wege: Die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler ε begangen werde, oder vielmehr, daß er zwischen ε und $\varepsilon + d\,\varepsilon$ liege, ist

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\,\varepsilon.$$

Nach der Definition dieser Wahrscheinlichkeit hat man aber

$$\frac{\text{Zahl der Fehler zwischen } \varepsilon \text{ und } \varepsilon + d\,\varepsilon}{\text{Gesamtzahl der Fehler}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\,\varepsilon.$$

Multipliziert man beide Seiten mit ε^2, so hat man

$$\frac{\text{Summe der Quadrate der Fehler zwischen } \varepsilon \text{ und } \varepsilon + d\varepsilon}{\text{Gesamtzahl der Fehler}} =$$

$$= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \varepsilon^2 e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon;$$

integriert man von $-\infty$ bis $+\infty$, so ergibt sich

$$\frac{\text{Summe der Quadrate aller Fehler}}{\text{Gesamtzahl der Fehler}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \mu^2.$$

4. Bestimmung des Integrals $\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon$.

Weil $\varepsilon^2 e^{-h^2 \varepsilon^2}$ eine gerade Funktion ist, so gilt die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = 2 \int_0^{\infty} \varepsilon^2 e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon.$$

Führt man eine neue Veränderliche mittels der Gleichung $h\varepsilon = t$ ein, so hat man, da $\varepsilon = \frac{t}{h}$, $d\varepsilon = \frac{dt}{h}$ ist.

$$\int_0^{\infty} \varepsilon^2 e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \int_0^{\infty} \frac{t^2}{h^2} e^{-t^2} \frac{dt}{h} = \frac{1}{h^3} \int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt.$$

Durch Anwendung des Verfahrens der partiellen Integration nach der Gleichung $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ erhält man,

$$u = -\frac{t}{2}, \quad dv = -2te^{-t^2} dt, \text{ also}$$

$$du = -\frac{dt}{2}, \quad v = e^{-t^2} \text{ setzend:}$$

$$\int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \left[-\frac{t}{2} e^{-t^2}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Hiemit ergibt sich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 c^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{h^3} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

und

$$\mu^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{2h^2},$$

$$\mu = \frac{1}{h\sqrt{2}} = \frac{0 \cdot 70711}{h}.$$

Auch der mittlere Fehler ist demnach dem Präzisionsmaß und daher der Genauigkeit der Beobachtungen umgekehrt proportional, eignet sich also wie der Durchschnittsfehler zu einem Genauigkeitsmaße.

Bei bekanntem μ gibt die letzte Formel ein Mittel zur Bestimmung des Präzisionsmaßes.

Man erkennt, daß der Zahlwert von μ mit der Maßzahl der Abszisse des Wendepunktes der Fehlerwahrscheinlichkeitskurve übereinstimmt. (Punkt 4 des II. Abschnittes.)

5. Der wahrscheinliche Fehler.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler in einer Beobachtungsreihe mit der Präzision h zwischen den symmetrischen Grenzen $-a$ und $+a$ liegt, lautet

$$W = \int_{-a}^{+a} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon;$$

setzt man hierin statt $\varphi(\varepsilon)$ die Gaußsche Fehlerfunktion ein, d. h.: befolgen die Fehler das Gesetz $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$, so folgt

1) $$W = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{a} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon.$$

Führt man in das bestimmte Integral eine neue Veränderliche mittels der Beziehung $h\varepsilon = t$ ein, so findet man

2) $$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{ah} e^{-t^2} dt.$$

Jenen Wert von a, absolut genommen, für welchen $W = \frac{1}{2}$ wird, nennt man, wie bereits bekannt, den **wahrscheinlichen Fehler**; dies ist also der Fehler, welcher bei einer gegebenen Gattung

von Beobachtungen ebenso leicht überschritten als nicht erreicht wird. Bezeichnet man daher den wahrscheinlichen Fehler mit r, so hat man

$$3)\qquad \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hr} e^{-t^2} dt.$$

Offenbar wird die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler dem absoluten Werte nach zwischen 0 und a liegt, wobei a kleiner als r ist, kleiner als $\frac{1}{2}$ sein; die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler dem absoluten Werte nach ins Intervall von 0 bis b fällt, wobei b größer ist als der wahrscheinliche Fehler r, ist hingegen größer als $\frac{1}{2}$. Hieraus folgt ferner, daß von den ihrem absoluten Werte nach geordneten Fehlern einer sehr langen Beobachtungsreihe ebensoviele ober dem wahrscheinlichen Fehler liegen als unter demselben. Hierauf beruht, wie später gezeigt werden soll, eine Methode zur Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers.

Entwickelt man den Exponentialausdruck in 2) in eine Reihe und integriert, so ergibt sich

$$4)\qquad W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[a h - \frac{\frac{1}{3}(a h)^3}{1} + \frac{\frac{1}{5}(a h)^5}{1.2} - \frac{\frac{1}{7}(a h)^7}{1.2.3} + \dots \right]$$

und die Berechnung von W ist nun für gegebene Werte von $a h$ einfach. (Vergleiche auch Punkt 10 des II. Abschnittes.)

Umgekehrt kann man, wenn W gegeben ist, a ausrechnen. Setzt man $W = \frac{1}{2}$, so wird $a = r$ = dem wahrscheinlichen Fehler und man findet durch wiederholte Näherungsrechnung

$$5)\qquad h r = 0{\cdot}47694;$$

daraus

$$6)\qquad r = \frac{0{\cdot}47694}{h}, \quad h = \frac{0{\cdot}47694}{r}.$$

Man sieht hieraus, daß der wahrscheinliche Fehler dem Maße der Präzision oder der Genauigkeit der Beobachtungen verkehrt proportional ist und daher theoretisch gleichfalls, wie ϑ und μ, für ein Genauigkeitsmaß geeignet ist. Setzt man $h = 1$, so wird $r = 0{\cdot}47694$, d. h. es ist 0·47694 der wahrscheinliche Fehler für die Einheit der Genauigkeit. Je kleiner der wahrscheinliche Fehler einer Reihe von Beobachtungen ist, desto genauer sind die-

selben, desto seltener werden Beobachtungsfehler von beträchtlicher Größe zu erwarten sein, weil immer die halbe Anzahl sämtlicher Fehler der absoluten Größe nach unter dem wahrscheinlichen Fehler liegen.

Man kann daher auch, wenn für eine größere Beobachtungsreihe die zufälligen Fehler der einzelnen Beobachtungen vorliegen, den wahrscheinlichen Fehler dieser Beobachtungen näherungsweise dadurch finden, daß man sämtliche Fehler nach ihrer Größe ohne Rücksicht auf das Zeichen ordnet; der in der Mitte liegende Fehler bei einer ungeraden Anzahl von Beobachtungen oder das arithmetische Mittel aus den zwei mittleren bei einer geraden Anzahl wird ein Näherungswert des wahrscheinlichen Fehlers sein. Offenbar ist diese Bestimmung eine sehr unsichere, denn es kommt dabei die absolute Größe aller andern als gerade der in der Mitte liegenden Fehler nicht in Betracht; ferner bleibt diese Bestimmung auch deshalb mehr oder weniger schwankend, weil die gegebenen Beobachtungsfehler in endlichen Intervallen aufeinander folgen, und daher eine Unsicherheit innerhalb eines solchen Intervalls übrig bleiben muß. Man verzichtet deshalb auf diese Art der Bestimmung von r, auch schon darum, weil man in der Regel nur solche Fehler kennen lernt, welche die Ausgleichung fordern und die somit von den wahren Fehlern abweichen. Die Bestimmung von r durch Abzählen an jenen Fehlern würde offenbar deshalb einer noch größeren Unsicherheit unterliegen.

Man pflegt die obere Grenze hr des Integrals in 3), welcher $W=\frac{1}{2}$ entspricht, allgemein mit ϱ zu bezeichnen, so daß

$$7) \qquad hr = \varrho = 0{\cdot}47694.$$

Die den Abszissen $+r$ und $-r$ entsprechenden Ordinaten der Fehlerwahrscheinlichkeitskurve enthalten zwischen sich die Hälfte des Inhaltes der von der ganzen Kurve und der Abszissenachse begrenzten Fläche.

6. Beziehungen zwischen dem durchschnittlichen, mittleren und wahrscheinlichen Fehler.

Aus der Zusammenstellung der Formeln für ϑ, μ, r:

$$\vartheta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}, \qquad \mu = \frac{1}{h\sqrt{2}}, \qquad r = \frac{\varrho}{h}$$

geht hervor, daß mit einer dieser drei Größen sowohl die beiden anderen als auch h bestimmt sind; es ergeben sich nämlich die Beziehungen:

$$\vartheta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \mu = 0{\cdot}79788\,\mu,$$

$$\vartheta = \frac{1}{\varrho\sqrt{\pi}} \cdot r = 1{\cdot}18294\,r,$$

$$\mu = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \vartheta = 1{\cdot}25331\,\vartheta,$$

$$\mu = \frac{1}{\varrho\sqrt{2}} \cdot r = 1{\cdot}48260\,r,$$

$$r = \varrho\sqrt{\pi}\,.\,\vartheta = 0{\cdot}84535\,\vartheta,$$

$$r = \varrho\sqrt{2}\,.\,\mu = 0{\cdot}67449\,\mu,$$

$$h = \frac{1}{\vartheta\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} = \frac{\varrho}{r} = \frac{0{\cdot}56419}{\vartheta} = \frac{0{\cdot}70711}{\mu} = \frac{0{\cdot}47694}{r}.$$

Man sieht, daß der mittlere Fehler größer und der wahrscheinliche Fehler kleiner ist als die beiden anderen; der wahrscheinliche Fehler ist ungefähr $\frac{2}{3}$ und der Durchschnittsfehler beinahe $0{\cdot}8 = \frac{4}{5}$ des mittleren Fehlers.

Hat man zwei der obigen Größen unabhängig voneinander bestimmt, so liefert ihre Prüfung an den verschiedenen Beziehungen eine generelle Probe dafür, ob die zu Grunde gelegten Fehler nahe genug dem Fehlergesetz entsprechen, aus welchem jene Beziehungen hervorgegangen sind. Ein sehr einfaches und elegantes Kriterium zur Feststellung, ob die zu Grunde gelegten Fehler dem Gaußschen Fehlergesetze genügen, lautet:

Wenn die Abweichungen einer Reihe von Zahlen von ihrem arithmetischen Mittel dem Gaußschen Fehlergesetze Genüge leisten, so ist das doppelte Quadrat des mittleren Fehlers, dividiert durch das Quadrat des durchschnittlichen Fehlers gleich der Zahl $\pi = 3{\cdot}14159$.

Es wurde nämlich gefunden: $\mu^2 = \frac{1}{2h^2}$, $\vartheta^2 = \frac{1}{\pi h^2}$; daraus folgt $\frac{2\mu^2}{\vartheta^2} = \pi = 3{\cdot}14159$.

Die Prüfung der Fehler ist immer eine sehr wichtige Aufgabe; denn die wesentliche Bedingung für die Anwendbarkeit der Methode ist die, daß die Fehler oder Verbesserungen klar das Gesetz der

zufälligen Fehler erkennen lassen. Diese Prüfung darf aber niemals dazu verleiten, eine Beobachtung, welche nicht schon vor der Berechnung verdächtig war, zu verwerfen. „Jede Beobachtung," sagt Gerling, „welche durch das Beobachtungsprotokoll nicht als verdächtig bezeichnet wird, ist für mich ein Zeuge, welcher soeben die Wahrheit bezeugt hat. Ich habe nicht das Recht, sein Zeugnis unter dem Vorwand zurückzuweisen, daß seine Aussagen von den anderen abweichen, ebensowenig als ich ihn foltern darf, bis er etwas mir Erwünschtes aussagt."

7. Ermittlung der Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler einer einzelnen Beobachtung einen gegebenen aliquoten Teil oder ein gegebenes Vielfaches des Durchschnittsfehlers, bezw. des mittleren oder des wahrscheinlichen Fehlers nicht überschreite.

Bekanntlich drückt

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah} e^{-t^2}\, dt$$

die Wahrscheinlichkeit aus, daß der Fehler ohne Rücksicht auf sein Vorzeichen zwischen den Grenzen 0 und a liege, oder absolut genommen die Größe a nicht überschreite. Es soll nun dieser Ausdruck für W unter der Annahme umgestaltet werden, daß der einer Beobachtung oder Bestimmung anhaftende Fehler dem Betrage nach zwischen 0 und dem k-fachen Durchschnittsfehler, beziehungsweise dem mittleren oder dem wahrscheinlichen Fehler gelegen sei, d. h. mit anderen Worten, die Umgestaltung erfolgt unter der Annahme, daß der durchschnittliche, beziehungsweise der mittlere oder der wahrscheinliche Fehler zur Einheit genommen wird. Behufs Durchführung der erwähnten Transformation beachte man, daß

$$ah = h\vartheta \,.\, \frac{a}{\vartheta}, \qquad ah = h\mu \,.\, \frac{a}{\mu}, \qquad ah = hr \,.\, \frac{a}{r};$$

hiefür kann man, weil

$$\vartheta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}, \qquad \mu = \frac{1}{h\sqrt{2}}, \qquad r = \frac{\varrho}{h}, \qquad \varrho = 0{\cdot}47694$$

ist, auch setzen

$$ah = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{a}{\vartheta}, \qquad ah = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\mu}, \qquad ah = \varrho \,.\, \frac{a}{r};$$

schreibt man ferner k statt $\frac{a}{\vartheta}$, beziehungsweise statt $\frac{a}{\mu}$ und $\frac{a}{r}$, so hat man

$$a\,h = \frac{k}{\sqrt{\pi}}, \qquad a\,h = \frac{k}{\sqrt{2}}, \qquad a\,h = \varrho\,k.$$

Der Ausdruck für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also bezüglich des Durchschnittsfehlers:

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{k}{\sqrt{\pi}}} e^{-t^2}\,dt = \Phi\left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right), \qquad k = \frac{a}{\vartheta};$$

bezüglich des mittleren Fehlers:

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{k}{\sqrt{2}}} e^{-t^2}\,dt = \Phi\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right), \qquad k = \frac{a}{\mu};$$

bezüglich des wahrscheinlichen Fehlers:

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho k} e^{-t^2}\,dt = \Phi(\varrho\,k), \qquad k = \frac{a}{r}.$$

Im Punkte 10 des II. Abschnittes wurde für die Wahrscheinlichkeit W, daß ein Fehler zwischen den Grenzen $-a$ und $+a$ liegt, die Formel abgeleitet

$$1)\quad W = \Phi(a\,h) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[a\,h - \frac{(a\,h)^3}{3\,.\,1!} + \frac{(a\,h)^5}{5\,.\,2!} - \frac{(a\,h)^7}{7\,.\,3!} + \frac{(a\,h)^9}{9\,.\,4!} - \cdots\right].$$

Führt man hierin statt des Genauigkeitsmaßes h den mittleren Fehler μ mittels der Beziehung $h = \frac{1}{\mu\sqrt{2}}$ ein, so hat man zunächst $a\,h = \frac{a}{\mu\sqrt{2}}$ und hiemit

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{a}{\mu\sqrt{2}} - \frac{1}{3\,.\,1!}\left(\frac{a}{\mu\sqrt{2}}\right)^3 + \frac{1}{5\,.\,2!}\left(\frac{a}{\mu\sqrt{2}}\right)^5 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{7\,.\,3!}\left(\frac{a}{\mu\sqrt{2}}\right)^7 + \cdots\cdots\right],$$

oder anders geschrieben

$$W = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{a}{\mu} - \frac{1}{6}\left(\frac{a}{\mu}\right)^3 + \frac{1}{40}\left(\frac{\ }{\ }\right)^5 - \frac{1}{336}\left(\frac{a}{\mu}\right)^7 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3456}\left(\frac{a}{\mu}\right)^9 - \cdots\cdots\right].$$

Setzt man hierin $\frac{a}{\mu}=k$, so folgt

$$2)\quad W=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[k-\frac{k^3}{6}+\frac{k^5}{40}-\frac{k^7}{336}+\frac{k^9}{3456}-\cdots\cdots\right];$$

dies ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Fehler zwischen den Grenzen Null und dem k-fachen mittleren Fehler liegt, dargestellt als Funktion von k.

Nach der Formel 2) ist man imstande, die Tabelle IV zu berechnen. Diese kann aber, wie im Punkte 10 dieses Abschnittes an einem Beispiele näher gezeigt werden wird, auch aus der Tabelle I ermittelt werden.

In ähnlicher Weise möge nun die Formel 1) für den wahrscheinlichen Fehler r transformiert werden.

Man hat $h=\frac{\varrho}{r}$, $a h=\varrho\frac{a}{r}$ und hiemit

$$W=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\varrho\frac{a}{r}-\frac{1}{3.1!}\left(\varrho\frac{a}{r}\right)^3+\frac{1}{5.2!}\left(\varrho\frac{a}{r}\right)^5-\frac{1}{7.3!}\left(\varrho\frac{a}{r}\right)^7+\cdots\right].$$

Bezeichnet man das Verhältnis $\frac{a}{r}$ irgend eines Fehlers a zum wahrscheinlichen Fehler r mit k, so erhält man als Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers zwischen den Grenzen Null und dem k-fachen wahrscheinlichen Fehler

$$3)\quad W=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\varrho k-\frac{(\varrho k)^3}{3.1!}+\frac{(\varrho k)^5}{5.2!}-\frac{(\varrho k)^7}{7.3!}+\frac{(\varrho k)^9}{9.4!}-\cdots\cdots\right],$$

oder nach Ausrechnung der Koeffizienten:

$$4)\quad W=0{\cdot}538\,1650\,k-0{\cdot}040\,8051\,k^3+0{\cdot}002\,7846\,k^5-$$
$$-0{\cdot}000\,1508\,k^7+0{\cdot}000\,0067\,k^9-0{\cdot}000\,0002\,k^{11}+\cdots\cdots$$

Eine Kontrolle dieser Gleichung besteht für den besonderen Fall $k=1$, denn hiefür muß sie den Wert 0·5 geben, was bis auf 7 Dezimalstellen hinreichend genau der Fall ist.

In der Tafel II sind die Funktionswerte 3) beziehungsweise 4) zusammengestellt; sie enthält also die Wahrscheinlichkeitswerte, daß der Fehler einer Beobachtung zwischen den Grenzen Null und dem k-fachen wahrscheinlichen Fehler liegt. Diese Tafel ist von Encke, wahrscheinlich durch Interpolation aus der Tafel I, konstruiert und im Berliner Astronomischen Jahrbuch für 1834 veröffentlicht worden. Wie bei der Aufstellung dieser Tafel nach dieser Art vorzugehen ist, zeigt näher das Beispiel im Punkt 9 dieses Abschnittes. Ein

Teil der Werte in Tafel II wurde von Professor Dr. W. Jordan nach den Formeln 3) beziehungsweise 4) kontrolliert. Die Tabelle III bildet einen Auszug der Tabelle II.

Nach dem Gesagten unterliegt es keiner Schwierigkeit, auch eine Formel zur Berechnung der Integralwerte

$$\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{a}{\vartheta}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{a}{\vartheta}} e^{-t^2}\,dt$$

aufzustellen.

Wahrscheinlichkeit W, daß der Fehler einer Bestimmung den k-fachen durchschnittlichen, beziehungsweise mittleren und wahrscheinlichen Fehler nicht überschreite.

k	$W=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{a}{\vartheta}} e^{-t^2}\,dt$	$W=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\mu}} e^{-t^2}\,dt$	$W=\int_0^{\varrho\frac{a}{r}} e^{-t^2}\,dt$
0·2	0·12696	0·16809	0·10731
0·4	0·25072	0·31100	0·21268
0·6	0·42645	0·45122	0·31430
0·8	0·47640	0·57653	0·41052
1·0	0·57489	0·68260	0·5
1·2	0·66163	0·76956	0·58171
1·4	0·73610	0·83851	0·65498
1·6	0·79789	0·89028	0·71949
1·8	0·85201	0·92818	0·77528
2·0	0·88933	0·95346	0·82261
2·2	0·92074	0·97114	0·86216
2·4	0·94448	0·98763	0·89450
2·6	0·96184	0·99065	0·92051
2·8	0·97445	0·99489	0·94105
3·0	0·98328	0·99729	0·95698
3·2	0·98932	0·99873	0·96910
3·4	0·99331	0·99932	0·97817
3·6	0·99591	0·99968	0·98482
3·8	0·99755	0·99985	0·98962
4·0	0·99857	0·99994	0·99302

Vorstehende kleine Tabelle gibt einige Werte der drei Integrale

$$\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{a}{\vartheta}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{a}{\vartheta}} e^{-t^2}\,dt,\quad \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\mu}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\mu}} e^{-t^2}\,dt \quad \text{und}$$

$$\Phi\left(\varrho\frac{a}{r}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\varrho\frac{a}{r}} e^{-t^2}\,dt.$$

Ein Blick auf diese Tabelle läßt erkennen, welche Ausdehnung ähnliche Tabellen für den praktischen Gebrauch haben sollen. Man sieht, daß vom praktischen Standpunkte sämtliche unver-vermeidliche Fehler beziehungsweise kleiner sind als

der 3·5-fache Durchschnittsfehler,
der 3 -fache mittlere Fehler und
der 4 -fache wahrscheinliche Fehler.

Ist n die Gesamtzahl aller Fehler, so gibt

$$z=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\varrho\frac{a}{r}} e^{-t^2}\,dt\times n=\Phi\left(\varrho\frac{a}{r}\right)\times n$$

die Zahl solcher Fehler unter diesen n Fehlern an, deren Wert unter dem $\frac{a}{r}$-fachen des wahrscheinlichen Fehlers liegt.

An diese Tabelle soll die Frage nach dem mutmaßlichen größten Fehler in einer Beobachtungsreihe angeschlossen werden. Bei einer Gattung von Beobachtungen bekannter Genauigkeit von einem größten Fehler schlechtweg zu sprechen, geht nicht an; denn bis zu welcher Größe Fehler auftreten, wenn man die dem Gesetze entsprechende Verteilung voraussetzt, hängt von dem Umfange der ausgeführten Beobachtungsreihe ab. Ist n die Anzahl der Beobachtungen, W die Wahrscheinlichkeit, daß der absolute Betrag eines Fehlers $k\mu$ nicht überschreite, so ist $n\,(1-W)$ die zu erwartende Anzahl der Fehler jenseits dieser Grenze; und nur wenn diese Anzahl 1 oder darüber ist, sind Fehler zu erwarten, die über den Betrag $k\mu$ hinausgehen. Man kann daher durch Auflösung der Gleichung

$$n(1-W)=1$$

nach n den Umfang der Beobachtungsreihe feststellen, bei welcher $k\mu$ als größter Fehler schon zu erwarten ist. Mit Benützung der Tabellenwerte von W ergibt sich:

für $k=2$,	2·4,	2·8,	3,	3·4,	3·8,	4,
$n=21$,	81,	196,	369,	1471,	6667,	16667.

Man ersieht daraus, wie rasch n im Vergleiche zu k wächst und daß nur bei sehr umfangreichen Beobachtungsreihen ein Fehler zu gewärtigen ist, der den dreifachen mittleren Fehler übersteigt. Selbst bei 100 Beobachtungen wird der größte Fehler voraussichtlich nicht das 2·5-fache des mittleren Fehlers erreichen.

Dieselbe Untersuchung bezüglich des wahrscheinlichen Fehlers r gibt den Umfang der Beobachtungsreihe, bei welcher $k\,r$ als größter Fehler schon zu erwarten ist. Man findet:

für $k = 2$,	2·4,	2·8,	3·2,	3·6,	4,
$n = 6$,	9,	17,	32,	66,	143.

8. Durchschnittswerte der Fehlerpotenzsummen als Genauigkeitsmaße.

Mit den drei besprochenen Genauigkeitsmaßen ϑ, μ und r ist die Zahl der möglichen Genauigkeitsmaße nicht erschöpft.

Als weitere Genauigkeitsmaße sind zunächst diejenigen Gegenstand eingehender Untersuchungen geworden, welche nach Art des Durchschnittsfehlers und des mittleren Fehlers aus Mittelwerten der Fehlerpotenzen hervorgehen.

Für den Durchschnitt der m-ten Fehlerpotenzen hat man $\frac{[|\varepsilon|^m]}{n}$, hiefür kann man, wenn m gerade ist, auch schreiben: $\frac{[\varepsilon^m]}{n}$.

Nach der Definition der Wahrscheinlichkeit hat man:

$$\frac{\text{Zahl der Fehler zwischen } \varepsilon \text{ und } \varepsilon + d\varepsilon}{\text{Gesamtzahl der Fehler}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\,\varepsilon,$$

$$\frac{\left\{\begin{matrix}\text{Summe der absoluten Beträge der } m\text{-ten Fehlerpotenzen} \\ \text{zwischen } \varepsilon \text{ und } \varepsilon + d\varepsilon\end{matrix}\right\}}{\text{Gesamtzahl der Fehler}} =$$

$$= \frac{h}{\sqrt{\pi}} [|\varepsilon|^m]\, e^{-h^2 \varepsilon^2} d\,\varepsilon;$$

integriert man von $-\infty$ bis $+\infty$, so ergibt sich

$$\frac{\text{Summe der absoluten Beträge der } m\text{-ten Potenzen aller Fehler}}{\text{Gesamtzahl der Fehler}} =$$

$$= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [|\varepsilon|^m]\, e^{-h^2 \varepsilon^2} d\,\varepsilon = \frac{2\,h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \varepsilon^m\, e^{-h^2 \varepsilon^2} d\,\varepsilon = S_m.$$



Setzt man $h\varepsilon = t$, so folgt:

$$1)\qquad S_m = \frac{2}{h^m \sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^m e^{-t^2} dt.$$

Ist m eine gerade Zahl, so gibt die Integralrechnung, wie am Schlusse dieses Punktes gezeigt werden wird, folgende allgemeine Beziehung an

$$2)\qquad \int_0^\infty t^m e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.\frac{1.3.5.7\ldots\ldots(m-1)}{2^{\frac{m}{2}+1}},$$

somit ist

$$3)\qquad S_m = \frac{1}{h^m}.\frac{1.3.5.7\ldots\ldots(m-1)}{2^{\frac{m}{2}}}.$$

Wird diese Gleichung für $m = 2, 4, 6, 8, \ldots\ldots$ spezialisiert, so erhält man:

als Durchschnitt der Fehlerquadrate oder als Quadrat des mittleren Fehlers

$$S_2 = \mu^2 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{2h^2};$$

als Durchschnittswert der vierten Fehlerpotenzen

$$S_4 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^4 e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1.3}{2^2 h^4};$$

als Durchschnittswert der sechsten Fehlerpotenzen

$$S_6 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^6 e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1.3.5}{2^3.h^6};$$

als Durchschnittswert der achten Fehlerpotenzen

$$S_8 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^8 e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1.3.5.7}{2^4.h^8}$$

u. s. f.

Ist hingegen m eine ungerade Zahl, so besteht, wie sogleich gezeigt werden soll, die Relation

$$4)\qquad \int_0^\infty t^m e^{-t^2}\,dt = \frac{2.4.6\ \ldots\ldots\ (m-1)}{2^{\frac{m+1}{2}}} =$$

$$= \frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots\frac{m-1}{2}}{2} = \frac{\frac{m-1}{2}!}{2},$$

und hiemit

$$5)\qquad S_m = \frac{\frac{m-1}{2}!}{h^m\sqrt{\pi}}.$$

Wird diese Gleichung für $m = 1, 3, 5, 7, \ldots\ldots$ spezialisiert, so erhält man:

als Durchschnittswert der absoluten Beträge der ersten Fehlerpotenzen oder als den Durchschnittsfehler

$$S_1 = \vartheta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}\cdot \qquad (0! = 1);$$

als Durchschnittswert der absoluten Beträge der dritten Fehlerpotenzen

$$S_3 = \frac{1}{h^3\sqrt{\pi}};$$

als Durchschnittswert der absoluten Beträge der fünften Fehlerpotenzen

$$S_5 = \frac{1.2}{h^5\sqrt{\pi}};$$

als Durchschnittswert der absoluten Beträge der siebenten Fehlerpotenzen

$$S_7 = \frac{1.2.3}{h^7\sqrt{\pi}}$$

u. s. f.

Zur Ermittlung der Integralwerte kann in folgender Weise vorgegangen werden:

Setzt man

$$J_m = \int_0^\infty t^m e^{-t^2}\,dt,$$

so ergibt sich mittels der teilweisen Integration, wenn

$$u = e^{-t^2}, \qquad d v = t^m d t, \qquad \text{daher}$$

$$d u = -2 t e^{-t^2}, \qquad v = \frac{t^{m+1}}{m+1} \qquad \text{angenommen wird,}$$

$$J_m = \left\{ \frac{1}{m+1} t^{m+1} e^{-t^2} \right\}_0^\infty + \frac{2}{m+1} \int_0^\infty t^{m+2} e^{-t^2} d t, \qquad \text{oder}$$

$$J_m = \frac{2}{m+1} \int_0^\infty t^{m+2} e^{-t^2} d t = \frac{2}{m+1} J_{m+2},$$

woraus

6) $$J_{m+2} = \frac{m+1}{2} J_m$$

folgt (siehe die Anmerkung zu diesem Punkte).

Kennt man daher J_0 und J_1, so können nach und nach sowohl für gerade, als ungerade m die Integralwerte J_m gefunden werden. Nun ist

$$J_0 = \int_0^\infty e^{-t^2} d t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{(Punkt 5 des II. Abschnittes) und}$$

$$J_1 = \int_0^\infty t e^{-t^2} d t = \frac{1}{2} \qquad \text{(Punkt 2 dieses Abschnittes),}$$

womit sich mittels Gleichung 6) die allgemeinen Formeln ergeben und zwar

$$J_m = \sqrt{\pi} \; \frac{1.3.5.7 \ldots . (m-1)}{2^{\frac{m}{2}+1}}, \quad \text{wenn } m \text{ gerade;}$$

$$J_m = \frac{\frac{m-1}{2}!}{2}, \qquad \text{wenn } m \text{ ungerade ist.}$$

Die allgemeine Gleichung 1) kann man auch in der Form schreiben:

7) $$S_m = \frac{1}{h^m} \times \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^m e^{-t^2} d t;$$

hierin bedeutet alsdann der Faktor von $\frac{1}{h^m}$ eine Konstante, welche durch K_m bezeichnet werden möge. Die Durchschnittswerte der absoluten Beträge der verschiedenen Fehlerpotenzen sind hiernach nur von dem Maße der Präzision h abhängige Größen. Aus

$$S_m = \frac{1}{h^m} . K_m \qquad \text{folgt} \qquad S_m . h^m = K_m;$$

zieht man aus beiden Teilen dieser Gleichung die m-te Wurzel und setzt $\sqrt[m]{S_m} = s_m$, $\sqrt[m]{K_m} = k_m$, so ergibt sich

$$s_m \,.\, h = k_m. \tag{8}$$

Zusammengefaßt hat man also:

$$S_1 = \vartheta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}, \qquad S_2 = \mu^2 = \frac{1}{2\,h^2},$$
$$S_3 = \frac{1}{h^3\sqrt{\pi}}, \qquad S_4 = \frac{1\,.\,3}{2^2\,h^4},$$
$$S_5 = \frac{1\,.\,2}{h^5\sqrt{\pi}}, \qquad S_6 = \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2^3\,h^6},$$
$$S_7 = \frac{1\,.\,2\,.\,3}{h^7\sqrt{\pi}}, \qquad S_8 = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2^4\,h^8},$$

....

Zur näherungsweisen Bestimmung von h aus einer beschränkten Anzahl von Beobachtungen kann man eine der Gleichungen benützen:

$$\frac{[|\varepsilon|]}{n} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}, \qquad \frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n} = \frac{1}{2\,h^2},$$
$$\frac{[|\varepsilon^3|]}{n} = \frac{1}{h^3\sqrt{\pi}}, \qquad \frac{[\varepsilon^4]}{n} = \frac{1\,.\,3}{2^2\,h^4},$$
$$\frac{[|\varepsilon^5|]}{n} = \frac{1\,.\,2}{h^5\sqrt{\pi}}, \qquad \frac{[\varepsilon^6]}{n} = \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2^3\,h^6},$$
$$\frac{[|\varepsilon^7|]}{n} = \frac{1\,.\,2\,.\,3}{h^7\sqrt{\pi}}, \qquad \frac{[\varepsilon^8]}{n} = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2^4\,h^8},$$

....

Zu bemerken ist, daß die aus der ersten Gleichung der rechtsstehenden Gleichungsgruppe sich ergebende Bestimmung von h mit derjenigen zusammenfällt, welche nach Punkt 9 des II. Abschnittes als die wahrscheinlichste erkannt wurde.

Bei Entscheidung der Frage, welches von all diesen Genauigkeitsmaßen zu wählen sei, hat — den praktischen Gesichtspunkt zunächst bei Seite gelassen — eine theoretische Erwägung mitzusprechen, auf welche hier nicht näher eingegangen werden soll. Das Resultat derselben sagt, daß die Beurteilung der Genauigkeit nach dem Mittelwerte der Fehlerquadrate, das heißt nach dem mittleren Fehler, die sicherste ist.

Die Sicherheit, welche die Wahl $m = 1$, d. i. der Durchschnittsfehler, gewährt, kommt jener bei der Wahl von $m = 2$ sehr nahe.

Dessenungeachtet und trotz der einfacheren Berechnung von ϑ gegenüber jener von μ ist doch der mittlere Fehler in der Astronomie, Geodäsie, Physik u. s. w. das üblichste Genauigkeitsmaß geworden. In der Schießtheorie hat sich fast ausschließlich der wahrscheinliche Fehler als Genauigkeitsmaß eingebürgert (in Rußland wird der mittlere Fehler auch in der Schießtheorie angewendet). Näheres hierüber findet man in „Die Theorie der Wahrscheinlichkeit und ihre Anwendung im Gebiete des Schießwesens" von Wuich, Seite 43, Punkt 10, 11 und 12, sowie in dessen Lehrbuch der äußeren Ballistik, Seite 500, Punkt 33, 34 und 35; ferner in Czubers „Theorie der Beobachtungsfehler", Seite 130, Punkt 53.

Anmerkung. Die Funktion $t^{m+1}\, e^{-t^2} = \frac{t^{m+1}}{e^{t^2}}$ verschwindet sowohl für $t = 0$ als auch für $t = \infty$. Daß sie für $t = 0$ verschwindet, ist unmittelbar einzusehen; daß sie aber auch für $t = \infty$ verschwindet, soll hier bewiesen werden.

Die Funktion $\frac{t^{m+1}}{e^{t^2}}$ nimmt für die obere Grenze $t = \infty$ die unbestimmte Gestalt $\frac{\infty}{\infty}$ an. Als wahrer Wert dieser Funktion ist bekanntlich der Grenzwert

$$\lim_{t=\infty} \frac{t^{m+1}}{e^{t^2}} = \lim_{t=\infty} \frac{\frac{d\,t^{m+1}}{d\,t}}{\frac{d\,e^{t^2}}{d\,t}} = \lim_{t=\infty} \frac{(m+1)\,t^m}{2\,t\,e^{t^2}} = \frac{m+1}{2} \lim_{t=\infty} \frac{t^{m-1}}{e^{t^2}}$$

anzusehen. Da nun aber Zähler und Nenner des letzten Bruches, nämlich t^{m-1} und e^{t^2} wieder für $t = \infty$ unendlich groß werden, so hat man abermals denselben Vorgang einzuschlagen; dieser muß überhaupt so oft wiederholt werden, bis man im Zähler t in der nullten Potenz erhält. Hiedurch gelangt man, von einer Konstanten abgesehen, entweder zu $\frac{1}{e^{t^2}}$ oder $\frac{1}{t\,e^{t^2}}$. Beide Brüche werden für $t = \infty$ offenbar Null. Man hat somit

$$\lim_{t=\infty} \frac{t^{m+1}}{e^{t^2}} = 0.$$

Es erfolgt also das Zunehmen der Exponentialfunktion e^{t^2} für ein gegen Unendlich zunehmendes t viel rascher als dasjenige irgend einer Potenz t^{m+1} mit endlichem positiven ganzen Exponenten. — Das Gesagte gilt auch, was nebenbei bemerkt werden möge, für die

Exponentialfunktion e^t und für die Potenzfunktion t^n, wobei n eine endliche positive ganze Zahl bedeutet.

9. Die p-prozentigen Fehlergrenzen als Genauigkeitsmaße.

Für die Wahrscheinlichkeit W, daß ein Fehler ohne Rücksicht auf sein Zeichen zwischen den Grenzen 0 und a liege, oder absolut genommen die Größe a nicht überschreite, wurde der Ausdruck gefunden

$$1)\qquad W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah} e^{-t^2}\, dt = \Phi(a h);$$

hierin soll das Genauigkeitsmaß h durch die sogenannte p-prozentige Fehlergrenze ersetzt werden.

Die p-prozentige Fehlergrenze a_p ist jener Wert des Fehlers a, für welchen die Wahrscheinlichkeit, daß dieser Wert absolut genommen nicht überschritten werde, gleich $\frac{p}{100} = 0{\cdot}01 \times p$ oder kürzer geschrieben $0{\cdot}0p$ ist, das heißt mit anderen Worten, es sind p Prozent der Fehler kleiner als a_p.

Die neu einzuführenden Genauigkeitsmaße a_p sind also Größen, welche aussagen, daß eine bestimmte Prozentzahl Beobachtungsfehler — p Prozent — kleiner ist als a_p.

a_{25}, a_{50}, a_{75} sind also beispielsweise Fehlergrenzen, gegenüber welchen beziehungsweise 25%, 50%, 75% sämtlicher Beobachtungsfehler kleiner sind.

Die 50-prozentige Fehlergrenze a_{50} deckt sich dem Gesagten zufolge mit dem wahrscheinlichen Fehler r, d. h. es ist $a_{50} = r$.

Es soll nun gezeigt werden, wie man in der Formel 1) das Maß der Präzision h durch die p-prozentige Fehlergrenze a_p ersetzen kann. Setzt man in 1) $W = \frac{p}{100} = 0{\cdot}0p$, so geht hiedurch a in a_p über und man erhält

$$\frac{p}{100} = 0{\cdot}0\,p = \Phi(a_p h);$$

wird der, dem Funktionswerte $0{\cdot}0\,p$ entsprechende, aus der Tabelle I zu entnehmende Argumentenwert mit ϱ_p bezeichnet, so hat man

$$2)\qquad \varrho_p = a_p h;$$

hierin bedeuten also ϱ_p und a_p mit der Prozentzahl p veränderliche Größen.

Aus der Tabelle I kann man auch, eventuell durch Interpolation, leicht ah finden, wenn $\Phi(ah)$ gegeben ist, d. h. die Fehlergrenze a, welche zu einer gegebenen Wahrscheinlichkeit $\Phi(ah)$ gehört. Demgemäß kann auch aus der Tabelle I eine andere abgeleitet werden, welche für um dieselbe Größe wachsende Funktionswerte die entsprechenden Argumentenwerte angibt.

In der nachfolgenden kleinen Tabelle beträgt die konstante Differenz der Funktionswerte 0·05.

$\Phi(ah)$	0·000	0·050	0·100	0·150	0·200	0·250	0·300	
$ah = \varrho$	0·0000	0·0448	0·0888	0·1337	0·1791	0·2253	0·2721	
$\Phi(ah)$	0·350	0·400	0·450	0·500	0·550	0·600	0·650	
$ah = \varrho$	0·3208	0·3708	0·4227	0·4769	0·5342	0·5951	0·6608	
$\Phi(ah)$	0·700	0·750	0·800	0·850	0·900	0·950	0·990	0·999
$ah = \varrho$	0·7329	0·8134	0·9062	1·0179	1·1631	1·3859	1·8214	2·3268

Für $p = 25$, 50 und 75 gibt diese Tabelle beziehungsweise $\varrho_{25} = 0·2253$, $\varrho_{50} = 0·4769$, $\varrho_{75} = 0·8134$ und dementsprechend

$$0·2253 = a_{25}\,h, \qquad 0·4769 = a_{50}\,h, \qquad 0·8134 = a_{75}\,h.$$

Wird der aus Formel 2) resultierende Wert von h in Formel 1) eingesetzt, so folgt:

3) $$W = \Phi\left(\varrho_p \cdot \frac{a}{a_p}\right)$$

und wenn $\frac{a}{a_p} = k$ gesetzt wird

4) $$W = \Phi(\varrho_p \,.\, k).$$

Nach dieser Umformung ist das Argument der Funktion eine Verhältniszahl $\frac{a}{a_p} = k$, welche das Verhältnis des absoluten Beobachtungsfehlers a zur p-prozentigen Fehlergrenze ausdrückt. Bei der Funktionsbezeichnung wird immer auch die Größe ϱ_p beigefügt, damit sofort erkannt wird, welche Prozentzahl zu Grunde gelegt wurde.

Für die Ausübung ist es zweckmäßig, die Funktion $\Phi(\varrho_p . k)$ durch eine Tabelle vertreten zu lassen, welche die Funktionswerte für nach konstanten Differenzen fortschreitende Argumentenwerte angibt; natürlich entspricht jeder angenommenen Prozentzahl, respektive jedem ϱ_p eine eigene Tabelle.

Diese Tabellen können alle aus jener für $\Phi(ah)$, Tabelle I, berechnet werden, was durch ein kleines Beispiel gezeigt werden soll.

Für die Prozentzahlen 25, 50, 75, respektive für ϱ_{25}, ϱ_{50}, ϱ_{75} sollen die den Argumentenwerten $k = 0{\cdot}5,\ 1{\cdot}0,\ 1{\cdot}5,\ 2{\cdot}0,\ 2{\cdot}5$ entsprechenden Funktionswerte $\Phi(\varrho_p . k)$ bestimmt werden.

Ist beispielsweise $\Phi(\varrho_{25} . 0{\cdot}5)$ zu ermitteln, so hat man, da $\varrho_{25} = 0{\cdot}2253$ ist, $\varrho_{25} . 0{\cdot}5 = 0{\cdot}11265$. Aus der Tabelle für $\Phi(ah)$ folgt $\Phi(0{\cdot}11265) = 0{\cdot}12657$, d. h. in Worten:

Wenn das Verhältnis der gegebenen Fehlergrenze a zur 25-prozentigen Fehlergrenze a_{25} gleich ist 0·5, so sind rund 13% sämtlicher Fehler kleiner als a. Wird in gleicher Weise mit der Rechnung fortgefahren, so gewinnt man die folgende Tabelle:

$k = \frac{a}{a_p}$	$\varrho_{25} = 0{\cdot}22531$ $\Phi(\varrho_{25} . k)$	$\varrho_{50} = 0{\cdot}47694$ $\Phi(\varrho_{50} . k)$	$\varrho_{75} = 0{\cdot}81344$ $\Phi(\varrho_{75} . k)$
0·5	0·12657	0·26407	0·43483
1·0	0·25	0·5	0·75
1·5	0·36730	0·68833	0·91537
2·0	0·47605	0·82261	0·97859
2·5	0·57430	0·90825	0·99588

Die Prozentzahlen der Fehler, welche kleiner sind als eine gegebene Fehlergrenze $a = k a_p$, werden erhalten, indem man $\Phi(\varrho_p . k)$ mit 100 multipliziert.

10. Die Wurzeln der Durchschnittswerte der Fehlerpotenzsummen als p-prozentige Fehlergrenzen aufgefaßt.

Auf Grund der bisherigen Untersuchungen wurden außer h zwei Gruppen von Genauigkeitsmaßen festgestellt, nämlich:

a) die m-ten Wurzeln der Durchschnittswerte der m-ten Potenzen der absoluten Beträge der Fehler und

b) die p-prozentigen Fehlergrenzen.

Vom rein analytischen Standpunkte hat offenbar die erste Gruppe eine größere Berechtigung, weil die ihr angehörenden Genauigkeitsmaße aus den absoluten Fehlern durch eine analytische Operation resultieren; die zweite Gruppe schließt sich aber mehr an die praktische Anschauung an.

Wie die beiden Gruppen in eine verschmolzen werden können, soll nachstehend gezeigt werden.

Den Wurzeln der Durchschnittswerte der Fehlerpotenzsummen kann eine anschaulichere Bedeutung dadurch gegeben werden, daß man die Prozentzahl der Fehler bestimmt, die kleiner als dieselben sind; indem ferner die Wurzeln dieser Durchschnittswerte als Fehlergrenzen a_p aufgefaßt werden, können sie auch die Rolle derselben übernehmen. In dieser Hinsicht sind der Durchschnittsfehler ϑ und der mittlere Fehler μ von besonders praktischer Bedeutung.

Für den Durchschnittsfehler hat man

$$\vartheta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}, \qquad \text{daraus} \qquad \vartheta h = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0{\cdot}56419.$$

Die Tabelle I gibt nun für den Argumentenwert 0·56419 den Funktionswert 0·57506; es sind also rund 58% der unvermeidlichen Fehler kleiner als der Durchschnittsfehler.

Der Durchschnittsfehler ϑ kann daher als die 58-prozentige Fehlergrenze aufgefaßt werden.

Für den Durchschnittsfehler liegt also die Wahrscheinlichkeit 0·58 oder 58% vor, daß der bei einer einzigen Beobachtung begangene Fehler kleiner als ϑ sei.

Für den mittleren Fehler μ hat man

$$\mu = \frac{1}{h\sqrt{2}}, \qquad \text{daraus} \qquad \mu h = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{\cdot}70711.$$

Die Tabelle I gibt nun für den Argumentenwert 0·70711 den Funktionswert 0·68268; es sind also rund 68% der unvermeidlichen Fehler kleiner als der mittlere Fehler.

Der mittlere Fehler μ kann daher als die 68-prozentige Fehlergrenze aufgefaßt werden.

Auf diese Art kann man fortfahren und findet aus den im Punkte 8 dieses Abschnittes gefundenen Beziehungen:

$$S_3 = \frac{1}{h^3\sqrt{\pi}}, \quad S_4 = \frac{1.3}{2^2 h^4}, \quad S_5 = \frac{1.2}{h^5\sqrt{\pi}}, \quad S_6 = \frac{1.3.5}{2^3 h^6}, \quad \ldots\ldots$$

die Argumentenwerte:

$$s_3 h = \sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{\pi}}} = 0{\cdot}82630, \quad s_4 h = \sqrt[4]{\frac{1.3}{2^2}} = 0{\cdot}96998,$$

$$s_5 h = \sqrt[5]{\frac{1.2}{\sqrt{\pi}}} = 1{\cdot}02445, \quad s_6 h = \sqrt[6]{\frac{1.3.5}{2^3}} = 1{\cdot}11045, \ \ldots\ldots;$$

diesen Argumentenwerten entsprechen nach der Tabelle I der Reihe nach die Funktionswerte

0·75741, 0·82986, 0·85259, 0·88368, ...,

welchen daher rund die

76-prozentige, 83-prozentige, 85-prozentige, 88-prozentige, ...

Fehlergrenze zukommt.

Mit Benützung der Tabelle II gelangt man zu denselben Resultaten, was für den Durchschnittsfehler und den mittleren Fehler gezeigt werden möge.

Es ist

$$r h = a_{50} h = \varrho = 0{\cdot}47694,$$

$$\vartheta h = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0{\cdot}56419,$$

$$\mu h = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{\cdot}70711,$$

daraus folgt

$$\frac{\vartheta}{a_{50}} = \frac{1}{\varrho\sqrt{\pi}} = \frac{1}{0{\cdot}47694\sqrt{\pi}} = 1{\cdot}18294;$$

für diesen Argumentenwert gibt die Tabelle II den Funktionswert 0·5762, was darauf hinweist, daß der Durchschnittsfehler als die 58-prozentige Fehlergrenze angesehen werden kann.

Man erhält ferner

$$\frac{\mu}{a_{50}} = \frac{1}{0{\cdot}47694\sqrt{2}} = 1{\cdot}48260;$$

für diesen Argumentenwert findet man aus der Tabelle II den Funktionswert 0·6818 entsprechend der 68-prozentigen Fehlergrenze.

Im Punkte 8 dieses Abschnittes wurde die Beziehung gefunden:

1) $$s_m h = k_m.$$

Wird nun in $\Phi(a h)$ für h der Wert aus 1) eingesetzt, so resultiert eine speziell für die Durchschnittswerte der m-ten Potenzen der unvermeidlichen Fehler geltende Modifikation der Formel

$$\Phi(a h) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a h} e^{-t^2} d t,$$

nämlich

2) $$\Phi\left(k_m \frac{a}{s_m}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{k_m \frac{a}{s_m}} e^{-t^2} dt,$$

welche für $s_1 = \vartheta$ und $s_2 = \mu$ die bereits im Punkte 7 dieses Abschnittes abgeleiteten Beziehungen gibt

3) $$\Phi\left(0{\cdot}56419 \frac{a}{\vartheta}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0{\cdot}56419 \frac{a}{\vartheta}} e^{-t^2} dt,$$

4) $$\Phi\left(0{\cdot}70711 \frac{a}{\mu}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0{\cdot}70711 \frac{a}{\mu}} e^{-t^2} dt.$$

Die in diesen Gleichungen vorkommenden Argumente sind

$$\frac{a}{\vartheta} = \frac{a}{a_{58}}, \quad \text{beziehungsweise} \quad \frac{a}{\mu} = \frac{a}{a_{68}}$$

und drücken das Verhältnis zwischen dem gegebenen Fehler a und der 58-prozentigen, beziehungsweise 68-prozentigen Fehlergrenze aus.

Für die Ausübung sind die Werte der beiden Integrale 3) und 4) durch Tabellen gegeben; letztere können mittels der Tabelle I, welche $\Phi(a h)$ gibt, berechnet werden, was ein Beispiel zeigen möge.

Es sollen beispielsweise die dem Argumentenwerte $\frac{a}{\vartheta} = \frac{a}{\mu} = 0{\cdot}5$ entsprechenden Funktionswerte berechnet werden.

Die Argumentenwerte für die Tabelle I sind:

0·56419 × 0·5, beziehungsweise 0·70711 × 0·5 oder
0·282095, beziehungsweise 0·353555,

wofür man als Funktionswerte aus der Tabelle I

0·31006, beziehungsweise 0·38292

erhält. Es ist also

die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers zwischen den Grenzen Null und dem 0·5-fachen Durchschnittsfehler 0·31006, ferner

die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers zwischen den Grenzen Null und dem 0·5-fachen mittleren Fehler 0·38292, während

die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers zwischen den Grenzen Null und dem 0·5-fachen wahrscheinlichen Fehler nur 0·26407 ist.

Die Werte des Integrals 4) sind, wie bereits bekannt, durch die Tabelle IV vertreten; die Tabelle V gibt die Werte des Integrals 3) an. Die im Punkte 7 dieses Abschnittes vorhandene kleine Tabelle gibt übrigens auch einige Werte dieser beiden Integrale an.

IV. Abschnitt.

Direkte Beobachtungen.

1. Prinzip der Methode der kleinsten Quadrate. Das arithmetische Mittel als wahrscheinlichster Wert der Unbekannten.

Angenommen, zur Ermittlung einer unbekannten Größe X seien n Messungen ausgeführt worden, welche das Resultat

$$l_1,\ l_2,\ \ldots\ldots,\ l_n$$

ergeben haben.

Diesen Beobachtungen schreibe man, nachdem für X die Größe ξ eingeführt worden, die Fehler

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \ldots\ldots,\ \delta_n$$

zu. Die Wahrscheinlichkeiten für diese Fehler sind, wenn $d\,\delta$ als konstantes Intervall für dieselben angenommen wird:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \delta_1^2} d\,\delta,\quad \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \delta_2^2} d\,\delta,\quad \ldots\ldots,\quad \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \delta_n^2} d\,\delta,$$

also ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß diese n Fehler in den n ausgeführten Beobachtungen auftreten:

$$1)\qquad \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots\cdots + \delta_n^2)} (d\,\delta)^n.$$

Man erklärt nun jenen Wert von ξ als den vorteilhaftesten oder wahrscheinlichsten, oder man bevorzugt jenen Wert von ξ vor allen anderen, welcher diese Wahrscheinlichkeit zu einem Maximum macht. Bei der Bestimmung dieses besonderen Wertes kommt nur die Exponentialfunktion

$$e^{-h^2(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots\cdots + \delta_n^2)}$$

in Betracht. Sie wird am größten, wenn der Exponent am kleinsten wird. Dieser Exponent besteht nun aus dem negativen Produkte der Konstanten h^2 und der Fehlerquadratsumme. Die Wahrscheinlichkeit 1) wird also für jenen Wert ein Maximum, für welchen die Summe

2) $$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots\cdots + \delta_n^2 \text{ ein Minimum}$$

wird. Hieraus folgt die fundamentale Regel: Von allen Annahmen bezüglich ξ ist diejenige die wahrscheinlichste, welche Fehler im Gefolge hat, deren Quadratsumme ein Minimum ist.

Dies ist das Prinzip in seiner einfachsten Form, auf welches sich die Methode der kleinsten Quadrate stützt; es bildet die Grundlage des Ausgleichungsverfahrens nach der Methode der kleinsten Quadrate. Der eben ausgesprochenen Bedingung verdankt die Methode den Namen „Theorie oder Methode der kleinsten Quadrate". Sie sollte eigentlich richtiger heißen „Methode der kleinsten Quadratsummen".

Bekanntlich ist $\delta_i = -l_i + \xi$; so daß die Summe

$$S = (-l_1 + \xi)^2 + (-l_2 + \xi)^2 + \cdots\cdots + (-l_n + \xi)^2$$

ein Minimum werden soll. Die Bedingung hiefür ist nach der Theorie über extreme Werte

$$\frac{dS}{d\xi} = 2\,[(-l_1 + \xi) + (-l_2 + \xi) + \cdots\cdots + (-l_n + \xi)] = 0,$$

woraus

$$n\,\xi = l_1 + l_2 + \cdots\cdots + l_n,$$

und als wahrscheinlichster Wert

$$\xi = \frac{l_1 + l_2 + \cdots\cdots + l_n}{n}$$

d. i. das arithmetische Mittel folgt. Dieses Ergebnis ist selbstverständlich, denn bei Ableitung der Funktion $\varphi(\delta)$ wurde ja der Satz vom arithmetischen Mittel zu Grunde gelegt.

Da ferner die zweite Differentiation

$$\frac{d^2 S}{d\xi^2} = 2\,n, \quad \text{d. h.} \quad \frac{d^2 S}{d\xi^2} > 0$$

gibt, wird S für das arithmetische Mittel tatsächlich ein Minimum.

A. Gleich genaue Beobachtungen.

2. Bestimmung der Genauigkeit einer Beobachtung. Der mittlere, wahrscheinliche und durchschnittliche Fehler einer Beobachtung.

Man spricht von einer direkten Beobachtung einer Größe, wenn die Messungen an der Größe selbst durchgeführt werden. Zum Beispiel: Direkte Messung einer Länge, indem man an diese den Maßstab anlegt; direkte Messung eines Winkels mit Hilfe eines Winkelmeßinstrumentes.

Es wird vorausgesetzt, die Beobachtungen seien gleich genau. Diese Redeweise erfordert eine Erklärung. Es erscheint zunächst als Widerspruch, wenn man zwei Beobachtungen, die verschiedene Resultate ergeben haben, als gleich genau bezeichnet. Hier ist die Genauigkeit nicht mit der Größe der Abweichung vom wahren Werte zu verknüpfen; wenn man die Beobachtungen oder Messungen als gleich genau erklärt, so sagt man damit, es sei nichts bekannt, was den Vorzug einer Beobachtung vor der anderen begründen würde. Nach dem Stande unseres Wissens kann das Resultat der einen Beobachtung ebenso als der wahre Wert der beobachteten Größe angesehen werden, als das einer anderen Beobachtung. Der wahre Wert der Größe bleibt uns immer unbekannt.

Zunächst soll der vorteilhafteste oder wahrscheinlichste Wert für die unbekannte Größe bestimmt werden.

Der wahre Wert der unbekannten Größe sei X; die an ihr gemachten, gleich genauen Beobachtungen seien

$$l_1,\ l_2,\ \ldots\ldots,\ l_n;$$

der vorteilhafteste oder wahrscheinlichste Wert der Unbekannten auf Grund der vorliegenden Beobachtungen ist bekanntlich gegeben durch

$$1)\qquad x = \frac{l_1 + l_2 + \cdots\cdots + l_n}{n} = \frac{\Sigma l}{n} = \frac{[l]}{n}.$$

Mit dieser Bestimmung allein stellt sich jedoch die Methode nicht zufrieden; sie verlangt einen Maßstab für die Genauigkeit in doppelter Hinsicht und zwar:

für die Genauigkeit der Beobachtung und

für die Genauigkeit des abgeleiteten Resultates, d. h. des arithmetischen Mittels.

Diese Aufgaben betreffen Fragen, welche mit den verfügbaren Mitteln beantwortet werden können. Der Vorgang hiebei sei im Nachstehenden gegeben.

Wüßte man den wahren Wert X der beobachteten Größe, dann wüßte man auch die Größe der wahren Verbesserungen. Man hätte für diese das Gleichungssystem:

$$2)\quad \begin{cases} \varepsilon_1 = -l_1 + X, \\ \varepsilon_2 = -l_2 + X, \\ \vdots \\ \varepsilon_n = -l_n + X; \end{cases}$$

nach den früher im Punkte 3 des III. Abschnittes gegebenen Erklärungen würde sich dann der mittlere Fehler μ nach der Formel

$$3)\quad \mu = \sqrt{\frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n}}$$

berechnen lassen.

Mit Hilfe des mittleren Fehlers würde man dann für den wahrscheinlichen Fehler r und für den Durchschnittsfehler ϑ erhalten:

$$4)\quad r = 0{\cdot}67449\,\mu, \quad \vartheta = 0{\cdot}79788\,\mu.$$

Die Größen μ, r und ϑ würden dann ein Maß für die Genauigkeit der Beobachtungen liefern.

Die Formel 3) ist jedoch für die Berechnung von μ unbrauchbar, weil die Kenntnis von X mangelt.

Man kennt nur die Abweichungen der Beobachtungen vom arithmetischen Mittel x; diese Abweichungen sind gegeben durch das Gleichungssystem (die Fehlergleichungen):

$$5)\quad \begin{cases} \lambda_1 = -l_1 + x, \\ \lambda_2 = -l_2 + x, \\ \vdots \\ \lambda_n = -l_n + x, \end{cases}$$

wobei

$$x = \frac{[l]}{n}.$$

Statt der wahren Fehler $-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, \ldots\ldots, -\varepsilon_n$ sind also bloß die scheinbaren oder plausiblen Fehler $-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots\ldots, -\lambda_n$ gegeben. Es könnte nun in der Voraussetzung, daß letztere sich nur sehr wenig von den wahren Fehlern unterscheiden, $[\varepsilon\,\varepsilon]$ durch $[\lambda\,\lambda]$ ersetzt werden; wie sich bald zeigen wird, gäbe dies jedoch einen zu

kleinen mittleren Fehler und daher eine Überschätzung der Genauigkeit.

Man steht nun vor der Aufgabe, die Größe μ so gut als möglich aus den Größen λ zu berechnen.

Der Rechnungsvorgang für die Ermittlung von μ aus den scheinbaren Fehlern ist folgender:

Wenn man jede Gleichung des Systems 2) mit dem entsprechenden ε multipliziert und dann die Summe bildet, so erhält man

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon_1 \varepsilon_1 = - \varepsilon_1 l_1 + \varepsilon_1 X \\ \varepsilon_2 \varepsilon_2 = - \varepsilon_2 l_2 + \varepsilon_2 X \\ \vdots \\ \varepsilon_n \varepsilon_n = - \varepsilon_n l_n + \varepsilon_n X \end{array}\right.$$

$$6) \qquad [\varepsilon \varepsilon] = - [\varepsilon l] + X [\varepsilon],$$

d. i. die Summe der Quadrate der wahren Fehler.

Multipliziert man jede Gleichung des Systems 5) mit dem zugehörigen λ und bildet dann die Summe, so ergibt sich, da zufolge 1) und 5) $[\lambda] = 0$ ist,

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 \lambda_1 = - \lambda_1 l_1 + \lambda_1 x \\ \lambda_2 \lambda_2 = - \lambda_2 l_2 + \lambda_2 x \\ \vdots \\ \lambda_n \lambda_n = - \lambda_n l_n + \lambda_n x \end{array}\right.$$

$$7) \qquad [\lambda \lambda] = - [\lambda l] + [\lambda] x = - [\lambda l],$$

also die Summe der Quadrate der plausiblen oder scheinbaren Fehler.

Multipliziert man ferner jede Gleichung des Systems 2) mit dem entsprechenden λ und summiert dann die Gleichungen, so resultiert, weil $[\lambda] = 0$ ist,

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon_1 \lambda_1 = - \lambda_1 l_1 + \lambda_1 X \\ \varepsilon_2 \lambda_2 = - \lambda_2 l_2 + \lambda_2 X \\ \vdots \\ \varepsilon_n \lambda_n = - \lambda_n l_n + \lambda_n X \end{array}\right.$$

$$8) \qquad [\varepsilon \lambda] = - [\lambda l] + X [\lambda] = - [\lambda l].$$

Die Gleichungen des Systems 5), mit den entsprechenden ε multipliziert und hierauf summiert, geben:

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon_1 \lambda_1 = -\varepsilon_1 l_1 + \varepsilon_1 x \\ \varepsilon_2 \lambda_2 = -\varepsilon_2 l_2 + \varepsilon_2 x \\ \vdots \\ \varepsilon_n \lambda_n = -\varepsilon_n l_n + \varepsilon_n x \end{array}\right.$$

9) $$[\varepsilon \lambda] = -[\varepsilon l] + [\varepsilon] x.$$

Subtrahiert man 9) von 6), so folgt:

$$[\varepsilon \varepsilon] = -[\varepsilon l] + X [\varepsilon]$$
$$[\varepsilon \lambda] = -[\varepsilon l] + [\varepsilon] x$$

10) $$[\varepsilon \varepsilon] - [\varepsilon \lambda] = (X - x) [\varepsilon].$$

Subtrahiert man 8) von 7), so gibt dies:

$$[\lambda \lambda] = -[\lambda l]$$
$$[\varepsilon \lambda] = -[\lambda l]$$

11) $$[\lambda \lambda] - [\varepsilon \lambda] = 0.$$

Subtrahiert man endlich 11) von 10), so ergibt dies:

$$[\varepsilon \varepsilon] - [\varepsilon \lambda] = (X - x) [\varepsilon]$$
$$[\lambda \lambda] - [\varepsilon \lambda] = 0$$

12) $$[\varepsilon \varepsilon] - [\lambda \lambda] = (X - x) [\varepsilon],$$

also eine Relation zwischen der Summe der wahren Fehlerquadrate und der Summe der Quadrate der plausiblen Fehler. Diese Relation ist bisher streng richtig; der rechte Teil derselben enthält aber die unbestimmbaren Größen X und ε. Die gefundene Formel 12) ist also zur Bestimmung von $[\varepsilon \varepsilon]$ noch nicht geeignet, deshalb ihr rechter Teil umgeformt werden soll.

Zu diesem Zwecke subtrahiere man von jeder der Gleichungen 2) die korrespondierende des Gleichungssystems 5) und bilde dann die Summe; man erhält dadurch:

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon_1 - \lambda_1 = X - x \\ \varepsilon_2 - \lambda_2 = X - x \\ \vdots \\ \varepsilon_n - \lambda_n = X - x \end{array}\right.$$

$$[\varepsilon] = n (X - x),$$

13) $$X - x = \frac{[\varepsilon]}{n};$$

das arithmetische Mittel der wahren Beobachtungsfehler oder der wahre Fehlerdurchschnitt ist also gleich $X - x$. Setzt man diesen für $X - x$ gefundenen Wert in 12) ein, so folgt:

$$14) \qquad [\varepsilon\varepsilon] - [\lambda\lambda] = \frac{[\varepsilon]^2}{n}.$$

Daraus erkennt man, daß in der Tat $[\varepsilon\varepsilon] > [\lambda\lambda]$. Nun ist

$$[\varepsilon]^2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots\cdots + \varepsilon_n)^2 =$$
$$= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots\cdots + \varepsilon_n^2 + 2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2 + 2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_3 + \cdots\cdots + 2\,\varepsilon_{n-1}\,\varepsilon_n =$$

$= [\varepsilon\varepsilon] + 2\,\Sigma\varepsilon_i\,\varepsilon_k$, worin i von k verschieden ist. Es fragt sich, welchen Mittelwert nimmt die Summe $\Sigma\varepsilon_i\,\varepsilon_k$ an, wenn man es wirklich mit zufälligen Fehlern zu tun hat. Ist der Fehler ε_i vorhanden, so ist auch anzunehmen, daß sich der Fehler $-\varepsilon_i$ in der langen Reihe der Beobachtungen einstellt. Analog kann man sagen, wenn der Fehler ε_k vorkommt, so ist auch der Fehler $-\varepsilon_k$ zu erwarten. Dies gibt die Erwartung auf vier verschiedene Produkte.

Treffen die Fehler ε_i und ε_k ein, so entsteht das Produkt $\varepsilon_i\,\varepsilon_k$,
treffen „ „ $-\varepsilon_i$ „ $-\varepsilon_k$ „ , „ „ „ „ $\varepsilon_i\,\varepsilon_k$,
„ „ „ $-\varepsilon_i$ „ ε_k „ , „ „ „ „ $-\varepsilon_i\,\varepsilon_k$,
„ „ „ ε_i „ $-\varepsilon_k$ „ , „ „ „ „ $-\varepsilon_i\,\varepsilon_k$.

Alle vier Produkte haben den gleichen Grad der Wahrscheinlichkeit und da die Summe dieser Produkte gleich Null ist, so beträgt der mittlere Wert der Summe $\Sigma\varepsilon_i\,\varepsilon_k$ Null; man hat also $\Sigma\varepsilon_i\,\varepsilon_k = 0$. Strenge genommen wird diese Bedingung erst bei einer unendlichen Anzahl von Beobachtungen erfüllt; es wird jedoch bei einer einigermaßen großen Anzahl von Beobachtungen die Summe $\Sigma\varepsilon_i\,\varepsilon_k$ schon so klein ausfallen, daß man dieselbe ohne Bedenken gegen $[\varepsilon\varepsilon]$, worin alle Summanden positiv sind, vernachlässigen darf. Man kann also setzen:

$$15) \qquad [\varepsilon]^2 = [\varepsilon\varepsilon]$$

und es sei nochmals bemerkt, daß diese Gleichung nicht auf strenger Deduktion beruht, sondern aus der Natur der zufälligen Fehler geschöpft wurde.

Mit Hilfe der Formel 15) verwandelt sich 14) in

$$[\varepsilon\varepsilon] - [\lambda\lambda] = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n},$$

oder

$$16) \qquad (n-1)\,[\varepsilon\varepsilon] = n\,[\lambda\lambda],$$

das ist eine Relation zwischen den Quadratsummen der wahren und der plausiblen Fehler. Aus 16) erhält man:

$$[\varepsilon\varepsilon] = \frac{n}{n-1}\,[\lambda\lambda].$$

Hiemit verwandelt sich 3) in

17) $$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}},$$

welche Gleichung zur Berechnung des mittleren Fehlers μ einer einzelnen Beobachtung geeignet ist, weil sie nur bekannte Größen enthält.

Der wahrscheinliche Fehler r einer Beobachtung und der durchschnittliche Fehler ϑ einer Beobachtung lassen sich aus μ durch Multiplikation mit bekannten Zahlenfaktoren ableiten.

Es sei noch bemerkt, daß die eben entwickelte Ableitung der Formel 17) nicht einwandfrei ist; doch soll hierauf nicht näher eingegangen werden und sei diesbezüglich auf das Werk „Theorie der Beobachtungsfehler von Czuber" hingewiesen (Seite 153, Punkt 64).

3. Berechnung des durchschnittlichen Fehlers aus den scheinbaren Fehlern nach Peters.

Würden die scheinbaren Verbesserungen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n$ ebenso wie die wahren Verbesserungen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_n$ dem Gaußschen Gesetze folgen, so bestünde zwischen dem mittleren und dem durchschnittlichen Fehler ihrer Reihe, d. i. zwischen μ' und ϑ' dieselbe Beziehung, welche zwischen den auf die Reihe der wahren Fehler bezüglichen Größen μ und ϑ, um deren Bestimmung es sich handelt, stattfindet, d. h. es wäre

1) $$\mu' = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \vartheta'$$

ebenso wie

2) $$\mu = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \vartheta$$

und die Bestimmung von μ' und ϑ' hätte den Gleichungen

3) $$\mu' = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n}},$$

4) $$\vartheta' = \frac{[|\lambda|]}{n}$$

gemäß zu erfolgen. Ersetzt man in 3) die Summe $[\lambda\lambda]$ durch ihren Mittelwert $(n-1)\mu^2$ [Gleichung 17) des Punktes 2 dieses Abschnittes], so ergibt sich das Verhältnis $\frac{\mu'}{\mu}$ und zwar

$$\frac{\mu'}{\mu} = \sqrt{\frac{n-1}{n}};$$

da vermöge 1) und 2) $\frac{\vartheta'}{\vartheta} = \frac{\mu'}{\mu}$, so ist auch

$$\frac{\vartheta'}{\vartheta} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}.$$

Führt man schließlich für ϑ' den in 4) angegebenen Wert ein, so kommt man zu dem Resultate

$$\vartheta = \frac{[|\lambda|]}{\sqrt{n(n-1)}}.$$

Peters hat die an die Spitze gestellte Voraussetzung, daß die scheinbaren Fehler zugleich mit den wahren das Exponentialgesetz befolgen, weder explizit ausgesprochen noch ihre Richtigkeit erwiesen. Darum konnte die Begründung seiner Formel nicht befriedigen und veranlaßte **Helmert** zu einer Neubegründung, auf welche hier nicht näher eingegangen werden soll. Aufschluß hierüber gibt **Czubers** Werk über die Theorie der Beobachtungsfehler, Seite 165, Punkt 71.

4. Bestimmung der Genauigkeit des arithmetischen Mittels. Der mittlere, wahrscheinliche und durchschnittliche Fehler des arithmetischen Mittels.

In der im Punkte 2 dieses Abschnittes gefundenen Gleichung 13)

$$X - x = \frac{[\varepsilon]}{n}$$

steht im linken Teile der Unterschied zwischen dem wahren Werte X und dem wahrscheinlichsten Werte x der Unbekannten. Dieser Unterschied gibt den **wahren Fehler des arithmetischen Mittels**; bezeichnet man ihn mit ε_x, so hat man: $\varepsilon_x = \frac{[\varepsilon]}{n}$.

Die Quadrierung ergibt:

1) $$\varepsilon_x^2 = \frac{[\varepsilon]^2}{n^2}.$$

Hierin kann, wie im Punkte 2 dieses Abschnittes bewiesen wurde, $[\varepsilon]^2$ durch $[\varepsilon\varepsilon]$ ersetzt werden, so daß der rechte Teil von 1) dann lautet: $\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n^2}$. Der Mittelwert von ε_x^2 ist das Quadrat des mittleren Fehlers von ε_x. Bezeichnet man den mittleren Fehler von

ε_x, d. i. den sogenannten mittleren Fehler des arithmetischen Mittels mit μ_x, so hat man: $\mu_x^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n^2}$. Weil ferner $\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}$ das Quadrat des mittleren Fehlers μ einer Beobachtung darstellt, also $\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} = \mu^2$ ist, so kann man auch schreiben $\mu_x^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n^2} = \frac{\mu^2}{n}$. Die Überlegung, daß $n\mu^2$ der Durchschnittsbetrag von $[\varepsilon\varepsilon]$ ist, führt zu demselben Resultate. Wie man sieht, erscheint der Fehler μ_x durch den mittleren Fehler μ einer Beobachtung ausgedrückt. Es findet also statt:

$$2)\qquad \mu_x^2 = \frac{\mu^2}{n}, \qquad \mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{n}}.$$

Die Genauigkeit des arithmetischen Mittels aus n gleich genauen Beobachtungen ist demnach $\sqrt{n}$-mal größer als die Genauigkeit der Beobachtungen selbst.

Es geben z. B. vier Beobachtungen die zweifache, neun Beobachtungen die dreifache Genauigkeit.

Der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels ist also gleich dem mittleren Fehler einer Beobachtung, geteilt durch die Quadratwurzel aus der Zahl der Beobachtungen; oder der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels nimmt im verkehrten Verhältnisse der Quadratwurzel aus der Anzahl der Beobachtungen ab; es werden daher vier Beobachtungen erfordert, um denselben auf die Hälfte, neun Beobachtungen, um ihn auf $^1/_3$, 100 Beobachtungen, um ihn auf $^1/_{10}$ des mittleren Fehlers einer Beobachtung herabzudrücken. Da man nun bezüglich der Vervielfältigung der Beobachtungen in jedem einzelnen Falle bald an eine durch Zeit und andere Umstände gesteckte Grenze gelangt, so erhellt von selbst, daß man trachten muß, schon die einzelnen Beobachtungen möglichst genau zu machen, da die bloße Vermehrung der Anzahl der Beobachtungen den Mangel an innerer Güte nicht zu ersetzen vermag.

Bezeichnen r_x und ϑ_x den wahrscheinlichen und den durchschnittlichen Fehler des arithmetischen Mittels, so ist

$$r_x = 0{\cdot}67449\,\mu_x, \qquad \vartheta_x = 0{\cdot}79788\,\mu_x.$$

Infolge des unveränderlichen Verhältnisses zwischen dem mittleren und wahrscheinlichen Fehler erhält man für den wahrscheinlichen Fehler des arithmetischen Mittels

$$r_x = \frac{r}{\sqrt{n}};$$

aus demselben Grunde folgt für den Durchschnittsfehler des arithmetischen Mittels

$$\vartheta_x = \frac{\vartheta}{\sqrt{n}}.$$

Für die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers einer Beobachtung und des wahrscheinlichen Fehlers des arithmetischen Mittels aus dem mittleren Fehler einer Beobachtung hat man:

$$r = 0{\cdot}6745\,\mu = 0{\cdot}6745\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}} = \frac{0{\cdot}6745}{\sqrt{n-1}}\sqrt{[\lambda\lambda]},$$

$$r_x = \frac{r}{\sqrt{n}} = \frac{0{\cdot}6745}{\sqrt{n(n-1)}}\sqrt{[\lambda\lambda]}.$$

Die numerischen Werte des Faktors $\frac{0{\cdot}6745}{\sqrt{n-1}}$ sind in der Tabelle VI, jene des Faktors $\frac{0{\cdot}6745}{\sqrt{n(n-1)}}$ in der Tabelle VII enthalten.

Für die Berechnung von r und r_x aus dem Durchschnittsfehler ϑ hat man:

$$r = 0{\cdot}8453\,\vartheta = 0{\cdot}8453\,\frac{[|\lambda|]}{\sqrt{n(n-1)}} = \frac{0{\cdot}8453}{\sqrt{n(n-1)}}\,[|\lambda|],$$

$$r_x = \frac{r}{\sqrt{n}} = \frac{0{\cdot}8453}{n\sqrt{n-1}}\,[|\lambda|].$$

Die numerischen Werte des Faktors $\frac{0{\cdot}8453}{\sqrt{n(n-1)}}$ enthält die Tabelle VIII, jene des Faktors $\frac{0{\cdot}8453}{n\sqrt{n-1}}$ die Tabelle IX.

Resumé unter Rücksichtnahme auf die Genauigkeitsbestimmung durch den mittleren Fehler. Liegen für eine Größe die direkten Messungen gleicher Genauigkeit $l_1, l_2, \ldots\ldots, l_n$ vor, so ist ihr plausibler Wert:

$$x = \frac{l_1 + l_2 + \cdots\cdots + l_n}{n};$$

die scheinbaren oder plausiblen Fehler der einzelnen Beobachtungen sind gegeben durch:

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = -l_1 + x, \\ \lambda_2 = -l_2 + x, \\ \vdots \\ \lambda_n = -l_n + x; \end{array}\right.$$

deren richtige Berechnung kann mittels der Gleichung $[\lambda]=0$ kontrolliert werden.

Der mittlere Fehler einer Messung ist:

$$\mu=\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}};$$

der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels beträgt:

$$\mu_x=\frac{\mu}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n(n-1)}}.$$

Das Resultat der Ausgleichung stellt man kurz durch

$$x\mp\mu_x$$

dar.

Die Summe $[\lambda\lambda]$ rechnet man aus den einzelnen λ mit Hilfe von Quadrattafeln. Man kann sie zur Kontrolle auch aus den l rechnen auf Grund der Gleichung:

$$[\lambda\lambda]=[l\,l]-\frac{[l]^2}{n},$$

die sich leicht aus den Ansätzen $x=\frac{[l]}{n}$, $\lambda_i=-l_i+x$ ableiten läßt; denn die letzte Gleichung gibt, wenn man sie quadriert und dann die Gleichung für x berücksichtigt

$$[\lambda\lambda]=[l\,l]+n.x^2-2\,[l]\,x=[l\,l]+n.\frac{[l]^2}{n^2}-2\,[l].\frac{[l]}{n}=[l\,l]-\frac{[l]^2}{n}.$$

1. Beispiel. Eine Strecke wurde sechsmal gleich sorgfältig gemessen; dabei ergaben sich für ihre Länge die aus der nachstehenden Tabelle zu entnehmenden Werte, welchen gleich die aus der Berechnung hervorgehenden λ und $\lambda\lambda$ beigesetzt sind.

Nr.	l	λ	$\lambda\lambda$
1	336·535 m	+ 0·004	16
2	48	— 9	81
3	20	+ 19	361
4	46	— 7	49
5	50	— 11	121
6	37	+ 2	4
	236	+ 25	632
		— 27	
		$[\lambda]\doteq 0$	

Es ist unnötig, die ganzen Meter und die Zehntelmeter in die Berechnung des arithmetischen Mittels hineinzunehmen, da es sich bloß um die Bestimmung der differierenden Stellen handelt. Ebenso wird die Berechnung bequemer, wenn man die λ als Einheiten der niedersten Ordnung behandelt und am Ende der Berechnung erst wieder den Dezimalpunkt gehörig vorsetzt. Daß sich $[\lambda]$ nicht genau auf Null reduziert, hat seinen Grund darin, daß im vorliegenden Falle $[l]$ durch n nicht ohne Rest teilbar ist und daher Abrundungsfehler vorkommen.

Man findet:

$$x = \frac{[l]}{n} = \frac{236}{6} = 39, \qquad \mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}} = \sqrt{\frac{682}{5}} = \pm 11{\cdot}2,$$

$$\mu_x = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{682}{6 \times 5}} = \pm 4{\cdot}6.$$

Geht man wieder auf die ursprünglichen Einheiten über, so erhält man:

$$x = 346{\cdot}539\, m, \qquad \mu = \pm 0{\cdot}011_2\, m, \qquad \mu_x = \pm 0{\cdot}004_6\, m.$$

Hienach wird man die Größe $x = 346{\cdot}539\, m$ als den wahrscheinlichsten Wert für die Länge der gemessenen Strecke beibehalten. Diese Länge ist auf $\pm 0{\cdot}004_6\, m$ sicher, d. h. die wahre Länge kann ebensowohl $346{\cdot}543_6\, m$ als auch $346{\cdot}534_4\, m$ betragen und bei einer einzelnen Messung derselben Strecke steht der mittlere Fehler $= \pm 0{\cdot}011_2\, m$ zu befürchten.

2. Beispiel. Im Laufe der Jahre 1892 bis 1894 wiederholte Bestimmungen der Polhöhe von Kapstadt haben die aus der nachstehenden Tabelle ersichtlichen 15 Werte ergeben, welche als gleich genaue Beobachtungen zu behandeln und auszugleichen sind.

Man rechnet

$$x = \frac{48{\cdot}92''}{15} = 3{\cdot}26'',$$

$$\mu = \sqrt{\frac{0{\cdot}3406}{14}} = 0{\cdot}16'',$$

$$\mu_x = \frac{0{\cdot}16''}{\sqrt{15}} = 0{\cdot}04''$$

und kann als Ergebnis der Ausgleichung hinstellen:

$$-33^0\, 56'\, 3{\cdot}26'' \mp 0{\cdot}04''.$$

Nr.	l	λ	$\lambda\lambda$
1	— 33° 56′ 3·48″	— 0·22	0·0484
2	3·50	— 0·24	0·0576
3	3·50	— 0·24	0·0576
4	3·32	— 0·06	0·0036
5	3·09	+ 0·17	0·0289
6	2·98	+ 0·28	0·0784
7	3·07	+ 0·19	0·0361
8	3·28	— 0·02	0·0004
9	3·27	— 0·01	0·0001
10	3·20	+ 0·06	0·0036
11	3·30	— 0·04	0·0016
12	3·25	+ 0·01	0·0001
13	3·11	+ 0·15	0·0225
14	3·30	— 0·04	0·0016
15	3·27	— 0·01	0·0001
	48·92	+ 0·86	0·3406
		— 0·88	
		— 0·02	

B. Ungleich genaue Beobachtungen.

5. Begriff des Gewichtes. Genauigkeitsbestimmung.

Eine unbekannte Größe X sei n-mal, jedoch nicht unter gleichen Umständen beobachtet worden, so daß den Beobachtungsergebnissen $l_1, l_2, \ldots\ldots, l_n$, deren Fehler einzeln dem Gaußschen Exponentialgesetz unterworfen sein mögen, verschiedene Genauigkeit oder Schärfe zukommt; die Präzisionsmaße $h_1, h_2, \ldots\ldots, h_n$, welche die verschieden guten Beobachtungen zum Ausdruck bringen, werden als bekannt vorausgesetzt.

Hieher gehören auch die wiederholten Beobachtungen, bei welchen man die Instrumente wechselt oder bei welchen die Beobachter wechseln.

Die Fehler, die man den Beobachtungen zuschreibt, seien wieder mit $-\delta_1, -\delta_2, \ldots\ldots, -\delta_n$ bezeichnet; dieselben stammen von der Annahme eines Wertes ξ für X. Mit der Annahme des Wertes ξ sind auch schon die Fehler $-\delta$ gegeben.

Die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen dieser Fehler aus der Annahme ξ ist jetzt proportional dem Produkte aus den Ex-

ponentialgrößen $e^{-h_1^2\delta_1^2}$, $e^{-h_2^2\delta_2^2}$, ..., $e^{-h_n^2\delta_n^2}$, also proportional zu

$$e^{-(h_1^2\delta_1^2 + h_2^2\delta_2^2 + \cdots\cdots + h_n^2\delta_n^2)}.$$

Man erklärt nun jenen Wert von ξ als den vorteilhaftesten oder wahrscheinlichsten, welcher diesen Ausdruck zu einem Maximum macht, was offenbar dann eintritt, wenn die Summe

$$1) \qquad h_1^2\delta_1^2 + h_2^2\delta_2^2 + \cdots\cdots + h_n^2\delta_n^2 \quad \text{ein Minimum}$$

wird.

Bekanntlich ist $\delta_i = -l_i + \xi$; für den vorteilhaftesten Wert von ξ muß also die Summe

$$S = h_1^2(-l_1+\xi)^2 + h_2^2(-l_2+\xi)^2 + \cdots\cdots + h_n^2(-l_n+\xi)^2$$

ein Minimum werden.

Die Bedingung hiefür ist nach der Theorie über extreme Werte

$$2) \qquad h_1^2(-l_1+\xi) + h_2^2(-l_2+\xi) + \cdots\cdots + h_n^2(-l_n+\xi) = 0;$$

hieraus erhält man für den vorteilhaftesten oder wahrscheinlichsten Wert der Unbekannten

$$3) \qquad \xi = \frac{h_1^2 l_1 + h_2^2 l_2 + \cdots\cdots + h_n^2 l_n}{h_1^2 + h_2^2 + \cdots\cdots + h_n^2},$$

also einen verallgemeinerten Mittelwert; derselbe soll, wie das arithmetische Mittel, mit x bezeichnet werden.

Weil ferner der zweite Differentialquotient

$$\frac{d^2 S}{d\xi^2} = 2(h_1^2 + h_2^2 + \cdots\cdots + h_n^2) > 0,$$

wird S für das verallgemeinerte Mittel tatsächlich ein Minimum.

Man kann die einzelnen Beobachtungen statt durch das Präzisionsmaß durch den mittleren Fehler charakterisieren. Ist μ_i der mittlere Fehler von l_i, so hat man $\mu_i^2 = \frac{1}{2h_i^2}$; daraus $h_i^2 = \frac{1}{2\mu_i^2}$. Mit Rücksicht darauf geht dann 3) über in:

$$x = \frac{\frac{1}{\mu_1^2}l_1 + \frac{1}{\mu_2^2}l_2 + \cdots\cdots + \frac{1}{\mu_n^2}l_n}{\frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{\mu_2^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{\mu_n^2}}.$$

Multipliziert man Zähler und Nenner mit der vorläufig beliebig gewählten positiven Zahl μ_0^2, so folgt:

$$x = \frac{\frac{\mu_0^2}{\mu_1^2} l_1 + \frac{\mu_0^2}{\mu_2^2} l_2 + \cdots\cdots + \frac{\mu_0^2}{\mu_n^2} l_n}{\frac{\mu_0^2}{\mu_1^2} + \frac{\mu_0^2}{\mu_2^2} + \cdots\cdots + \frac{\mu_0^2}{\mu_n^2}}.$$

Setzt man $\frac{\mu_0^2}{\mu_i^2} = p_i$, so erscheint x unter der Form

4) $$x = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots\cdots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \cdots\cdots + p_n} = \frac{[p\, l]}{[p]}.$$

Die positiven Zahlen $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$, welche dem Gange der Rechnung nach proportional sind den Quadraten der Genauigkeit der Beobachtungen, bezeichnet man als deren Gewichte. Man kann durch entsprechende Wahl von μ_0^2 bewirken, daß die Gewichte ganze Zahlen werden oder wenigstens bis auf zu vernachlässigende Bruchteile durch ganze Zahlen ersetzt werden können.

Für $\mu_i = \mu_0$ wird $p_i = 1$; es hat also die eingeführte Zahl μ_0 die Bedeutung des mittleren Fehlers einer fingierten Beobachtung, der das Gewicht eins zukommt. Man nennt aus diesem Grunde μ_0 den mittleren Fehler der Gewichtseinheit.

Hätte man $p_1 + p_2 + \cdots\cdots + p_n$ Beobachtungen von der Art der fingierten, also vom Gewichte eins angestellt und hätten davon p_1 das Resultat l_1, p_2 das Resultat l_2, ..., p_n das Resultat l_n ergeben, so ergäbe sich aus diesen gleich genauen Beobachtungen auch der Mittelwert 4). Es wiegt demnach eine Beobachtung, deren Gewicht p ist, p Beobachtungen vom Gewichte eins auf, zunächst in Bezug auf die Bildung des Mittelwertes.

Das Gewicht tritt zu den bisher betrachteten Präzisionsmaßen als neues Präzisionsmaß hinzu.

Sowie die Form 3) des Resultates aus der Bedingung 1), so kann die Form 4) aus der Bedingung, daß

$$(\sqrt{p_1} \cdot \delta_1)^2 + (\sqrt{p_2} \cdot \delta_2)^2 + \cdots\cdots + (\sqrt{p_n} \cdot \delta_n)^2 \text{ ein Minimum}$$

sein muß, abgeleitet werden.

Weil nämlich $\delta_i = -l_i + \xi$, so muß

$$p_1(-l_1 + \xi)^2 + p_2(-l_2 + \xi)^2 + \cdots\cdots + p_n(-l_n + \xi)^2 \text{ ein Minimum}$$

werden, also

$$p_1(-l_1 + \xi) + p_2(-l_2 + \xi) + \cdots\cdots + p_n(-l_n + \xi) = 0$$

sein; daraus folgt

$$\xi = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots\cdots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \cdots\cdots + p_n} = \frac{[p\, l]}{[p]},$$

übereinstimmend mit 4).

Die λ der Gleichungen $\lambda_i = -l_i + x$, $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ entsprechen Beobachtungen mit verschiedenen Gewichten. Man kann aber auf gleiche Gewichte, etwa auf die Gewichtseinheit reduzieren, indem man beachtet, daß eine Beobachtung l_i von x mit dem Gewichte p_i immer aufgefaßt werden kann als eine Beobachtung $l_i \sqrt{p_i}$ von $x \sqrt{p_i}$ mit dem Gewichte eins, wofür die Verbesserung $\lambda_i \sqrt{p_i}$ ist. Die plausiblen Verbesserungen $\lambda_1 \sqrt{p_1}, \lambda_2 \sqrt{p_2}, \ldots\ldots, \lambda_n \sqrt{p_n}$ beziehen sich hienach auf gleich genaue Beobachtungswerte vom Gewichte eins.

Im Falle ungleich genauer Beobachtungen erweitert sich also das im Punkte 1 dieses Abschnittes erkannte Prinzip der Methode der kleinsten Quadrate dahin, daß die Summe der mit den Gewichten multiplizierten Quadrate der (scheinbaren) Fehler zu einem Minimum zu machen sei, um den vorteilhaftesten Wert für die Unbekannte zu erhalten.

Die Formel 4) kommt auch zur Anwendung, wenn die Werte $l_1, l_2, \ldots, l_n$ nicht unmittelbare Beobachtungsresultate, sondern arithmetische Mittel aus Beobachtungsreihen darstellen; $\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots, \mu_n$ bedeuten dann die mittleren Fehler dieser arithmetischen Mittel.

Es handelt sich noch darum, mit Hilfe der bekannten Gewichte und der scheinbaren Fehler die Genauigkeitsbestimmung durchzuführen, nämlich den mittleren Fehler der Gewichtseinheit und des verallgemeinerten Mittels zu berechnen.

Zwischen dem mittleren Fehler μ_i einer Beobachtung vom Gewichte p_i und dem mittleren Fehler μ_0 einer Beobachtung vom Gewichte eins besteht bekanntlich die Beziehung $\frac{\mu_0^2}{\mu_i^2} = p_i$; daraus folgt:

$$\mu_0 = \mu_i \sqrt{p_i}.$$

Überträgt man diese Beziehung auf die einzelnen Abweichungen vom Mittel, so wird der Abweichung λ_i einer Beobachtung vom Gewichte p_i bei einer Beobachtung vom Gewichte eins die Abweichung

$$\lambda'_i = \lambda_i \sqrt{p_i}$$

entsprechen. Aus den transformierten Abweichungen $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots\ldots, \lambda'_n$ aber bestimmt sich der mittlere Fehler der Gewichtseinheit gemäß der Formel $\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}$ mit

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[\lambda'\lambda']}{n-1}};$$

führt man hierin die scheinbaren Fehler λ selbst mittels der Gleichung $\lambda'_i = \lambda_i \sqrt{p_i}$ ein, so wird also endgültig:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{n-1}}.$$

Für den mittleren Fehler des verallgemeinerten Mittels ergibt sich der Ausdruck

$$\mu_x = \frac{\mu_0}{\sqrt{[p]}} = \sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{(n-1)[p]}}.$$

Für ungleich genaue Beobachtungen bestehen, wie leicht einzusehen, folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 = -l_1 + X, \\ \varepsilon_2 = -l_2 + X, \\ \vdots \\ \varepsilon_n = -l_n + X \end{array}\right\}$$

für die wahren Fehler,

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1 = -l_1 + \xi, \\ \delta_2 = -l_2 + \xi, \\ \vdots \\ \delta_n = -l_n + \xi, \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = -l_1 + x, \\ \lambda_2 = -l_2 + x, \\ \vdots \\ \lambda_n = -l_n + x, \end{array}\right\}$$

für die scheinbaren oder plausiblen Fehler; diese Gleichungen heißen Fehlergleichungen;

diese drei Gleichungssysteme gelten auch für gleich genaue Beobachtungen; bei ungleich genauen Beobachtungen erfolgt jedoch die Berechnung des wahrscheinlichsten Wertes x der Unbekannten mit Rücksicht auf die Gewichte der Beobachtungen.

$$x = \frac{[p\,l]}{[p]}.$$

Aus dem dritten System folgt mit Rücksicht auf den Wert von x die Beziehung $p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + \cdots\cdots + p_n\lambda_n = [p\,\lambda] = 0$.

Resumé. Sind nebst $l_1, l_2, \ldots\ldots, l_n$ auch deren Gewichte $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$ gegeben, so rechne man

$$x = \frac{[p\,l]}{[p]};$$

hiemit die scheinbaren Fehler

$$\lambda_i = -l_i + x,$$

welche bei richtiger Ausführung der Rechnung die Kontrolle $[p\,\lambda] = 0$ bestehen müssen; dann den mittleren Fehler der Gewichtseinheit

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{n-1}}$$

und den mittleren Fehler des verallgemeinerten Mittels

$$\mu_x = \frac{\mu_0}{\sqrt{[p]}};$$

das Resultat der Ausgleichung ist wieder in der Form

$$x \mp \mu_x$$

zu geben.

Waren die mittleren Fehler der Beobachtungen l gegeben, so hat die Gewichtsberechnung voranzugehen; man wählt für die p_i in passender Weise Zahlen, die den $\frac{1}{\mu_i^2}$ proportional sind.

Die Summe $[p\lambda\lambda]$ kann zur Kontrolle auch aus den l nach der Formel

$$[p\lambda\lambda] = [p\,l\,l] - \frac{[p\,l]^2}{[p]}$$

berechnet werden, die sich aus den zwei ersten Ansätzen ergibt. Man hat nämlich:

$$\lambda_i = -l_i + x = -l_i + \frac{[p\,l]}{[p]}, \qquad \lambda_i\lambda_i = l_i\,l_i + \frac{[p\,l]^2}{[p]^2} - 2\,l_i\frac{[p\,l]}{[p]},$$

$$p_i\lambda_i\lambda_i = p_i\,l_i\,l_i + p_i\frac{[p\,l]^2}{[p]^2} - 2\,p_i\,l_i\frac{[p\,l]}{[p]},$$

$$[p\lambda\lambda] = [p\,l\,l] + [p]\frac{[p\,l]^2}{[p]^2} - 2\frac{[p\,l]^2}{[p]} = [p\,l\,l] - \frac{[p\,l]^2}{[p]}.$$

Die Zusammenstellung nimmt lediglich auf die Genauigkeitsbestimmung durch den mittleren Fehler Rücksicht.

1. Beispiel. Der Flächeninhalt F einer ebenen Figur wurde auf mechanischem Wege mit verschiedenen Hilfsmitteln dreimal gemessen, wobei verschiedene mittlere Fehler sich ergeben haben. Es ist die Ausgleichung der direkten Beobachtungen vorzunehmen, wenn die erhaltenen Werte sind:

$$F_1 = 45{\cdot}4\ cm^2, \qquad \mu_1 = \pm\,0{\cdot}30\ cm^2,$$
$$F_2 = 45{\cdot}1\ cm^2, \qquad \mu_2 = \pm\,0{\cdot}12\ cm^2,$$
$$F_3 = 44{\cdot}9\ cm^2, \qquad \mu_3 = \pm\,0{\cdot}18\ cm^2.$$

Zunächst sollen die Gewichte p_1, p_2, p_3 der drei ungleich genauen Beobachtungen bestimmt werden.

Da die Gewichte den Quadraten der mittleren Fehler umgekehrt proportional sind, so hat man:

$p_1 = \frac{1}{\mu_1^2} = \frac{1}{0{\cdot}30^2}$	$\frac{1}{30^2}$	$\frac{1}{5^2}$	36
$p_2 = \frac{1}{\mu_2^2} = \frac{1}{0{\cdot}12^2}$	$\frac{1}{12^2}$	$\frac{1}{2^2}$	225
$p_3 = \frac{1}{\mu_3^2} = \frac{1}{0{\cdot}18^2}$	$\frac{1}{18^2}$	$\frac{1}{3^2}$	100

Für das Verhältnis der drei Gewichte hat man also

$$p_1 : p_2 : p_3 = 36 : 225 : 100.$$

Hiefür kann als hinreichender Näherungswert $p_1 : p_2 : p_3 = 1 : 6 : 3$ angenommen werden. Ferner setze man zur Vereinfachung der Rechnung:

$$F_1 = 45{\cdot}4 = 45{\cdot}0 + 0{\cdot}4 = F_0 + 0{\cdot}4, \quad F_2 = F_0 + 0{\cdot}1, \quad F_3 = F_0 - 0{\cdot}1.$$

Nr.	l	p	pl	λ	$p\lambda$	$p\lambda\lambda$
1	2	3	4	5	6	7
1	$+0{\cdot}4$	1	$+0{\cdot}4$	$-0{\cdot}33$	$-0{\cdot}33$	$0{\cdot}1089$
2	$+0{\cdot}1$	6	$+0{\cdot}6$	$-0{\cdot}03$	$-0{\cdot}18$	$0{\cdot}0054$
3	$-0{\cdot}1$	3	$-0{\cdot}3$	$+0{\cdot}17$	$+0{\cdot}51$	$0{\cdot}0867$
		10 $[p]$	$+0{\cdot}7$ $[pl]$		$-0{\cdot}51$ $+0{\cdot}51$ $[p\lambda] = 0$	$0{\cdot}2010$ $[p\lambda\lambda]$

In der vorstehenden Tabelle werden zuerst die Kolonnen 1, 2, 3 und 4 ausgefüllt und dann das verallgemeinerte Mittel

$$x = \frac{[pl]}{p} = \frac{0{\cdot}07}{10} = 0{\cdot}07\ cm^2$$

gerechnet; daher ist der wahrscheinlichste Wert der Fläche

$$F = F_0 + x = 45{\cdot}0 + 0{\cdot}07 = 45{\cdot}07\ cm^2.$$

Nun werden die Kolonnen 5, 6 und 7 berechnet.

Man erhält für den mittleren Fehler der Gewichtseinheit, das ist für den mittleren Fehler der gleich genauen Beobachtungen, welche man sich denken kann, um aus ihrem arithmetischen Mittel beziehungsweise die Werte F_1, F_2, F_3 zu finden:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{n-1}} = \sqrt{\frac{0{\cdot}2010}{2}} = \pm 0{\cdot}31_7\ cm^2;$$

der mittlere Fehler des verallgemeinerten Mittels beträgt:

$$\mu_x = \sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{(n-1)[p]}} = \sqrt{\frac{0\cdot2010}{2 \times 10}} = \pm\, 0\cdot10_0\ cm^2.$$

Zur Kontrolle kann man ferner die mittleren Fehler der einzelnen Beobachtungen rechnen:

$$\mu_1' = \frac{\mu_0}{\sqrt{p_1}} = \frac{0\cdot31_7}{\sqrt{1}} = \pm\, 0\cdot31_7\ cm^2,$$

$$\mu_2' = \frac{\mu_0}{\sqrt{p_2}} = \frac{0\cdot31_7}{\sqrt{6}} = \pm\, 0\cdot13_0\ cm^2,$$

$$\mu_3' = \frac{\mu_0}{\sqrt{p_3}} = \frac{0\cdot31_7}{\sqrt{3}} = \pm\, 0\cdot18_3\ cm^2,$$

wobei $\mu_1' : \mu_2' : \mu_3' = \mu_1 : \mu_2 : \mu_3$ sein muß.

2. Beispiel. Zur Bestimmung der Polhöhe der großen Kuppel des Astrophysikalischen Observatoriums bei Potsdam wurden in den Jahren 1892 bis 1893 wiederholte Beobachtungen nach der Horrebow-Methode an Sternpaaren vorgenommen. Dieselben sind gruppenweise zu Mittelwerten vereinigt worden. Die Mittelwerte der so gebildeten 11 Gruppen nebst den Anzahlen der dabei verwendeten Sternpaare sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Aus denselben ist das Schlußresultat zu ziehen und seine Genauigkeit zu bestimmen.

Die Anzahlen der Sternpaare werden als Gewichte zu verwenden sein.

Nr.	l	Paare p	$p\,l$	λ	$\lambda\lambda$	$p\lambda\lambda$
1	52° 22′ 53·98″	99	97·02	— 0·02	0·0004	0·0396
2	53·86	118	101·48	+ 0·10	0·0100	1·1800
3	53·95	114	108·30	+ 0·01	0·0001	0·0144
4	54·01	142	143·42	— 0·05	0·0025	0·3550
5	54·06	163	172·78	— 0·10	0·0100	1·6300
6	53·98	192	188·16	— 0·02	0·0004	0·0768
7	53·91	158	143·78	+ 0·05	0·0025	0·3950
8	53·97	102	98·94	— 0·01	0·0001	0·0102
9	53·93	103	95·79	+ 0·03	0·0009	0·0927
10	53·90	131	117·90	+ 0·06	0·0036	0·4716
11	53·91	90	81·90	+ 0·05	0·0025	0·2250
		1412 $[p]$	1349·47 $[p\,l]$			4·3873 $[p\lambda\lambda]$

Die Kolonne $p\,l$ ist mit den Resten von l gerechnet, welche nach Abtrennung von $52^0\,22'\,53''$ übrig bleiben.

Man bestimmt nun das verallgemeinerte Mittel:

$$x = \frac{1349\cdot 47}{1412} = 0\cdot 96'';$$

den mittleren Fehler der Gewichtseinheit, d. i. der Polhöhenbestimmung aus einem Sternpaare:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{4\cdot 3873}{10}} = 0\cdot 66'';$$

den mittleren Fehler des verallgemeinerten Mittels:

$$\mu_x = \frac{0\cdot 66}{\sqrt{1412}} = 0\cdot 018''.$$

Das Ergebnis der Ausgleichung ist hiernach:

$$52^0\,22'\,53\cdot 96'' \mp 0\cdot 018''.$$

6. Funktionen direkt beobachteter Größen.

Es sei $V = F(X_1,\ X_2,\ \ldots\ldots,\ X_n)$ eine beliebige Funktion der von einander unabhängigen Größen $X_1,\ X_2,\ \ldots\ldots,\ X_n$; für diese seien durch direkte Beobachtung die vorteilhaftesten Werte $x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_n$ mit ihren mittleren Fehlern $\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots\ldots,\ \mu_n$ gefunden worden. Man soll bestimmen:

A) den vorteilhaftesten Wert v der Unbekannten V und

B) dessen Genauigkeit, ausgedrückt durch die mittleren Fehler der beobachteten Größen.

A) Bestimmung des wahrscheinlichsten (vorteilhaftesten oder plausiblen) Wertes einer Funktion $V = F(X_1,\ X_2,\ \ldots\ldots,\ X_n)$.

Die genaue Bestimmung der Größe V ist nicht möglich, weil man die Werte von $X_1,\ X_2,\ \ldots\ldots,\ X_n$ nicht absolut genau bestimmen kann.

Als Ersatz für den wahren Wert der Unbekannten V kann man den Wert v benützen, welcher gegeben ist durch

$$v = F(x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_n);$$

denn die vorteilhafteste Bestimmung von V ergibt sich aus den vorteilhaftesten Werten der Elemente. Hiedurch ist die erste der gestellten Aufgaben unmittelbar gelöst.

Nun soll zur Lösung der zweiten Aufgabe übergegangen werden.

B) Bestimmung des mittleren Fehlers von v.

Die Fehler, welche den Größen x_1, x_2, ..., x_n anhaften, übertragen sich naturgemäß auch auf v. Es handelt sich also darum, das Gesetz zu finden, nach welchem sich die Unsicherheit in der Bestimmung der Rechenelemente x_1, x_2, ..., x_n auf das aus ihnen abgeleitete Resultat v überträgt oder fortpflanzt (Fehlerfortpflanzungsgesetz).

Zunächst sollen einige spezielle Fälle betrachtet werden.

Speziele Fälle.

a) Es sei zunächst der einfachste Fall angenommen, in welchem die Funktion

$$V = a\,X$$

zu berechnen wäre, wobei a einen bekannten Koeffizienten bezeichnet. In diesem Falle ist also nur eine unabhängige Größe X gegeben und es ist ein Vielfaches dieser Größe zu rechnen. Als vorteilhaftester Wert für X wurde der Wert x gefunden. Statt $a\,X$ rechnet man

$$v = a\,x;$$

man erhält also für die wahre Verbesserung von v

$$V - v = a\,(-x + X).$$

Bezeichnet man die wahre Verbesserung von x mit ε und die wahre Verbesserung von v mit ε_v, so kann man die letzte Gleichung in der Form

$$\varepsilon_v = a\,\varepsilon$$

schreiben; hieraus folgt durch Quadrierung:

$$\varepsilon_v^2 = a^2\,\varepsilon^2.$$

Der Mittelwert von ε^2 ist nun das Quadrat des mittleren Fehlers von x, nämlich μ^2, daher ergibt sich für den mittleren Fehler μ_v von v die Beziehung

$$\mu_v^2 = a^2\,\mu^2$$

oder

$$\mu_v = a\,\mu.$$

Der mittlere Fehler eines Vielfachen wächst also wie dieses selbst.

Nimmt man beispielsweise $V = 3\,X$, so ergibt sich $\mu_v = 3\,\mu$.



Es soll noch das Gewicht p_v von v ermittelt werden, wenn man das Gewicht p von x kennt. Bedeutet μ_0 den mittleren Fehler der Gewichtseinheit, so hat man (nach Punkt 5 dieses Abschnittes):

$$p_v = \frac{\mu_0^2}{\mu_v^2}, \qquad p = \frac{\mu_0^2}{\mu^2};$$

folglich, weil $\mu_v^2 = a^2 \mu^2$ ist,

$$\frac{\mu_0^2}{p_v} = a^2 \frac{\mu_0^2}{p};$$

daraus findet man

$$p_v = \frac{p}{a^2}.$$

b) Es werde nun der Fall betrachtet, wenn V die Summe der zwei beobachteten Größen X_1 und X_2, also

$$V = X_1 + X_2$$

ist. Die vorteilhaftesten Werte, welche für X_1 und X_2 gefunden wurden, seien x_1 und x_2 mit den mittleren Fehlern μ_1 und μ_2. Statt

$$V = X_1 + X_2 \quad \text{rechnet man} \quad v = x_1 + x_2$$

und es ist

$$V - v = (-x_1 + X_1) + (-x_2 + X_2),$$

oder nach Einsetzung der wahren Verbesserungen ε_1, ε_2 und ε_v für x_1, x_2 und v

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2;$$

hieraus folgt durch Quadrierung:

$$\varepsilon_v^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2.$$

Der Mittelwert von ε_1^2 ist nun das Quadrat des mittleren Fehlers von x_1, nämlich μ_1^2; der Mittelwert von ε_2^2 das Quadrat des mittleren Fehlers von x_2, nämlich μ_2^2, endlich der Mittelwert von $\varepsilon_1\,\varepsilon_2$ gleich Null; daher ergibt sich für den mittleren Fehler μ_v von v die Beziehung:

$$\mu_v^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2$$

oder

1) $$\mu_v = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}.$$

Wenn

$$V = X_1 - X_2,$$

so erhielte man auf gleichem Wege für μ_v denselben Ausdruck 1).

Der mittlere Fehler der algebraischen Summe zweier unabhängig voneinander beobachteter Größen ist der

Quadratwurzel aus der Quadratsumme der mittleren Fehler dieser Größen gleich (Didionsches Gesetz oder der pythagoräische Lehrsatz der Ausgleichsrechnung).

Es soll noch die übersichtliche Herleitung der Formel $\mu_v^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2$ beigefügt werden. Speziell für diese Herleitung werden, um nicht noch weitere Weiser zur Unterscheidung der Fehler anwenden zu müssen, die wahren Fehler der m-mal beobachteten Größe X_1 durch $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_m$, jene der n-mal beobachteten Größe X_2 durch $b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n$ bezeichnet. Es ist alsdann

$$\mu_1^2 = \frac{[a\,a]}{m}, \qquad \mu_2^2 = \frac{[b\,b]}{n}.$$

Um μ_v^2 zu bilden, hat man zu beachten, daß man sich jeden Fehler von X_1 mit jedem Fehler von X_2 kombiniert denken kann, wodurch man zusammen mn-Werte für die Bildung von μ_v^2 erhält; das nachfolgende Schema macht dies ersichtlich.

$$\left.\begin{array}{llll}
(a_1 + b_1)^2 & (a_2 + b_1)^2 & \ldots\ldots\ldots & (a_m + b_1)^2 \\
(a_1 + b_2)^2 & (a_2 + b_2)^2 & \ldots\ldots\ldots & (a_m + b_2)^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(a_1 + b_n)^2 & (a_2 + b_n)^2 & \ldots\ldots\ldots & (a_m + b_n)^2
\end{array}\right\}$$

Die Addition ergibt, wenn man beachtet, daß der Mittelwert der Summe $[a_i b_k]$ Null beträgt,

$n\,a_1^2 + [b\,b],\ \ n\,a_2^2 + [b\,b],\ \ldots\ldots,\ n\,a_m^2 + [b\,b]$; die Summe dieser Glieder ist gleich $n\,[a\,a] + m\,[b\,b]$.

Es ist also

$$\mu_v^2 = \frac{n\,[a\,a] + m\,[b\,b]}{m\,n} = \frac{[a\,a]}{m} + \frac{[b\,b]}{n} = \mu_1^2 + \mu_2^2.$$

c) Verallgemeinerung des Falles ***b)***.

Man hat die n Größen

$$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$$

beobachtet und für dieselben als vorteilhafteste Werte

$$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$$

mit ihren mittleren Fehlern

$$\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots, \mu_n$$

erhalten. Ist

$$V = X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n,$$

so hat man als Ersatz hiefür

$$v = x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n$$

zu bilden. Als mittlerer Fehler μ_v von v ergibt sich alsdann

$$\mu_v = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \ldots\ldots + \mu_n^2}.$$

Diese Formel kommt auch dann zur Anwendung, wenn die Einflüsse mehrerer voneinander unabhängiger Fehlerquellen, die einzeln durch die mittleren Fehler μ_1, μ_2, ..., μ_n charakterisiert sind, sich zu einem Gesamtfehler vereinigen.

Sind alle Elemente mit gleicher Genauigkeit bestimmt, so daß

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots\ldots = \mu_n = \mu$$

ist, so gilt für den letzten Fall die Formel

$$\mu_v = \mu \sqrt{n}.$$

Nimmt man beispielsweise $V = X_1 + X_2 + X_3$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$, so ist $\mu_v = \mu \sqrt{3}$.

Es wächst also der mittlere Fehler der Summe gleich genau bestimmter Summanden wie die Quadratwurzel aus deren Anzahl.

Ist hingegen $V = n X$, n eine Konstante, x der vorteilhafteste Wert von X, μ der mittlere Fehler von x, so hat man $v = n x$ und $\mu_v = n \mu$. [Fall *a)*.] Der mittlere Fehler eines Vielfachen wächst also wie dieses selbst, was bereits unter *a)* gesagt wurde.

Aus der Formel $\mu_v = \mu \sqrt{n}$ folgt der für die Praxis wichtige Satz: Wird eine Größe durch Zusammensetzung mehrerer Teile bestimmt, so nimmt der mittlere Fehler der algebraischen Summe wie die Quadratwurzel aus der Anzahl der Teile zu. Man wird daher immer in solchen Fällen trachten, die Anzahl der Teile möglichst gering zu machen.

Aus der Vergleichung der beiden Formeln $\mu_v = n \mu$ und $\mu_v = \mu \sqrt{n}$ folgt weiters, daß, wenn eine Größe V nicht unmittelbar als Ganzes bestimmt werden kann, es vorteilhafter ist, dieselbe aus mehreren direkt beobachteten Teilen zusammenzusetzen, als einen aliquoten Teil zu messen und durch Vervielfachung desselben V zu bilden. Im ersteren Falle ist nämlich, wenn n Teile gemessen wurden, deren Summe $= V$ ist, $\mu_v = \mu \sqrt{n}$, wenn μ der mittlere Fehler eines Teiles ist. Hat man aber mit derselben Genauigkeit nur den n-ten Teil von V, d. i. $\frac{V}{n} = X$ gemessen, wo dann $V = n X$, so wird $\mu_v = n \mu$, somit der mittlere Fehler von V im letzteren Falle $\sqrt{n}$-mal größer als im ersteren, und man müßte n-mal den n-ten Teil von V messen, um V mit derselben Genauigkeit zu erhalten.

Es soll noch die Gewichtsbestimmung vorgenommen werden.

Bezeichnet man mit p_1, p_2 die Gewichte von x_1, x_2, mit p_v das Gewicht von v, so ist, wenn μ_0 den mittleren Fehler der Gewichtseinheit bedeutet,

$$p_v = \frac{\mu_0^2}{\mu_v^2}, \qquad p_1 = \frac{\mu_0^2}{\mu_1^2}, \qquad p_2 = \frac{\mu_0^2}{\mu_2^2},$$

folglich, da $\mu_v^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2$ ist,

$$\frac{\mu_0^2}{p_v} = \frac{\mu_0^2}{p_1} + \frac{\mu_0^2}{p_2}; \text{ daraus folgt:}$$

$$p_v = \frac{1}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}} = \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2}.$$

Sind die Werte von x_1, x_2 gleich genau, so wird

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu, \qquad p_1 = p_2 = p, \qquad \text{somit}$$

$$\mu_v = \mu \sqrt{2}, \qquad p_v = \frac{p}{2}.$$

Sind n Größen x_1, x_2, ..., x_n gegeben, welche als gleich genau angesehen werden können, so erhält man für das Gewicht p_v von v

$$p_v = \frac{p}{n}, \quad \text{wobei wieder} \quad p = p_1 = p_2 = \cdots\cdots = p_n \quad \text{ist.}$$

Die Formel $\mu_v = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots\cdots + \mu_n^2}$ findet auch Anwendung auf den Fall, wenn ein Resultat durch mehrere voneinander unabhängige Beobachtungen zustande kommt, deren jede einem gewissen Fehler unterworfen ist. So erfordert z. B. die Beobachtung einer Richtung mit einem Winkelmeßinstrumente die Einstellung des Fernrohres auf das Objekt und die Ablesung am Teilkreise. Nennt man daher α den mittleren Einstellungsfehler (Visurfehler), β den mittleren Fehler einer Ablesung, so ist der mittlere Fehler einer beobachteten Richtung $\mu = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Die Messung eines Winkels erfordert die Beobachtung zweier Richtungen, deren jede dem mittleren Fehler μ unterworfen ist; der mittlere Fehler des gemessenen Winkels ist daher der Formel $\mu_v = \mu \sqrt{n}$ zufolge gegeben durch

$$\mu \sqrt{2} = \sqrt{2(\alpha^2 + \beta^2)}.$$

d) Verbindung des Falles ***a)*** mit dem Falle ***c)***.

Dann ist

$$V = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots\cdots + a_n X_n$$

und als Ersatz hiefür rechnet man

$$v = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots\cdots + a_n x_n.$$

Bedeuten wieder $\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots, \mu_n$ die mittleren Fehler der vorteilhaftesten Werte $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ und μ_v den mittleren Fehler von v, so ergibt sich

$$\mu_v = \sqrt{a_1^2 \mu_1^2 + a_2^2 \mu_2^2 + \cdots\cdots + a_n^2 \mu_n^2}.$$

Bezeichnet man mit p_v das Gewicht von v, mit $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$ die Gewichte von $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$, so wird wegen

$$\mu_v^2 = \frac{\mu_0^2}{p_v}, \qquad \mu_i^2 = \frac{\mu_0^2}{p_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots, n,$$

$$\frac{1}{p_v} = \frac{a_1^2}{p_1} + \frac{a_2^2}{p_2} + \cdots\cdots + \frac{a_n^2}{p_n}.$$

Häufig kommt der Fall vor, daß eine Größe v durch die halbe Summe oder halbe Differenz zweier beobachteter Größen x_1, x_2 bestimmt wird, also

$$v = \frac{1}{2}(x_1 \pm x_2)$$

ist. Für diesen Fall folgt

$$p_v = \frac{4\, p_1 p_2}{p_1 + p_2},$$

wenn p_1 und p_2 die Gewichte von x_1 und x_2 sind.

Ist $\mu_1 = \mu_2 = \cdots\cdots = \mu_n = \mu$, also auch $p_1 = p_2 = \cdots\cdots = p_n = p$, d. h. sind die beobachteten Werte $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ gleich genau, so hat man

$$\mu_v = \mu \sqrt{[a\,a]}, \qquad \frac{1}{p_v} = \frac{[a\,a]}{p}.$$

Allgemeiner Fall.

Man betrachte nun den allgemeinen Fall, wo

$$V = F(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$$

irgend eine beliebige Funktion von $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ bedeuten möge. Für diese Größen $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ wurden aus direkten Beobachtungen die vorteilhaftesten Werte $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ mit den mittleren Fehlern $\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots, \mu_n$ erhalten. Der vorteilhafteste Wert v von F ist gegeben durch

$$v = F(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n).$$

Sind die wahren Verbesserungen der Bestimmungen $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ beziehungsweise $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_n$, ferner ε_v die wahre Verbesserung von v, so hat man auch

$$V = F(x_1 + \varepsilon_1,\ x_2 + \varepsilon_2,\ \ldots\ldots,\ x_n + \varepsilon_n)$$

und

$$V - v = \varepsilon_v = F(x_1 + \varepsilon_1,\ x_2 + \varepsilon_2,\ \ldots\ldots,\ x_n + \varepsilon_n) - F(x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_n).$$

Werden die Verbesserungen $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots\ldots,\ \varepsilon_n$ sehr klein vorausgesetzt, so kann man nach dem Taylorschen Lehrsatze mit Vernachlässigung der höheren Potenzen dieser sehr kleinen Größen setzen:

$$V = F(x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_n) + \frac{\partial F}{\partial x_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}\varepsilon_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\varepsilon_n =$$
$$= v + \frac{\partial v}{\partial x_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2}\varepsilon_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n}\varepsilon_n,$$

woraus

$$V - v = \varepsilon_v = \frac{\partial v}{\partial x_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2}\varepsilon_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n}\varepsilon_n.$$

folgt.

Die Größe $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ entsteht aus dem Differentialquotienten $\frac{\partial F}{\partial X_i}$, wenn man in demselben $X_i = x_i$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n)$ setzt; es ist also $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ eine gegebene Größe. Nach dem speziellen Falle *d)* erhält man also zur Bestimmung des mittleren Fehlers μ_v von v die Beziehung:

$$\mu_v = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 \mu_1^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2 \mu_2^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{\partial v}{\partial x_n}\right)^2 \mu_n^2} = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \mu^2\right]}.$$

Die Größe a_i im speziellen Falle *d)* erscheint durch den Differentialquotienten $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ des vorliegenden Falles vertreten.

Damit ist die gestellte Aufgabe, das Gesetz zu finden, nach welchem sich die Unsicherheit in der Bestimmung der Rechenelemente $x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_n$ auf das aus ihnen abgeleitete Resultat v überträgt, allgemein gelöst.

Genau dieselben Relationen sowohl in den speziellen Fällen als auch im allgemeinen Falle bestehen auch zwischen den wahrscheinlichen beziehungsweise durchschnittlichen Fehlern der Größen x und dem wahrscheinlichen beziehungsweise durchschnittlichen Fehler von v.

Man wird kaum jemals an Größen Messungen vornehmen nur zu dem Zwecke, um diese Größen für sich zu ermitteln; der Endzweck ist vielmehr in der Regel aus den gemessenen Größen andere zu bestimmen.

Beispiel. Um ein Beispiel der Anwendung des allgemeinen Falles zu geben, soll untersucht werden, wie groß der **wahrscheinliche Fehler eines Produktes** ist, wenn man die wahrscheinlichen Fehler der Faktoren kennt.

Man hat $V = X_1 X_2$, $v = x_1 x_2$, $\frac{\partial v}{\partial x_1} = x_2$, $\frac{\partial v}{\partial x_2} = x_1$; ist ferner r_1 der wahrscheinliche Fehler von x_1, r_2 der wahrscheinliche Fehler von x_2, so folgt für den wahrscheinlichen Fehler r_v des Produktes

$$r_v = \sqrt{x_2^2 . r_1^2 + x_1^2 . r_2^2} = \sqrt{r_1^2 x_2^2 + r_2^2 x_1^2}.$$

Gesetzt, daß $x_1 = 7{\cdot}22$ und $r_1 = 0{\cdot}62$,
$x_2 = 5{\cdot}47$ und $r_2 = 0{\cdot}35$,

so würde der wahrscheinliche Fehler r_v des Produktes $r_v = 4{\cdot}23$ sein, während der wahrscheinlichste Wert v von V oder $X_1 X_2$ gleich 39·493 ist.

Dieses Beispiel beantwortet die oft angeregte und nicht selten unrichtig beantwortete Frage, wie groß der wahrscheinliche Fehler einer Fläche ist, wenn man die wahrscheinlichen Fehler der linearen Messungen kennt. Wäre etwa ein Quadrat gemessen, dessen Seiten gleich l mit dem wahrscheinlichen Fehler $= r$ behaftet sind, so würde hienach der wahrscheinliche Fehler der Fläche $= l r \sqrt{2}$ sein.

Kennt man den wahrscheinlichen Fehler des Produktes und zugleich den des einen Faktors, so ergibt sich der des anderen aus

$$r_2 = \frac{1}{x_1} \sqrt{r_v^2 - r_1^2 x_2^2}.$$

7. Beispiele.

1. **Beispiel.** Es soll eine Strecke mit einem gegebenen Maßstabe gemessen werden. Zunächst kommt es darauf an, auszumitteln, mit welcher Genauigkeit man mit dem Maßstabe messen kann. Gesetzt, es sei auf irgend eine Weise gelungen, den mittleren Fehler μ zu finden, den man begeht, wenn man eine dem Maßstabe gleiche Länge gemessen zu haben meint. Würde nun ein Geometer, dem diese Aufgabe des Messens zukommt, glauben, Mittel zu besitzen, um eine gegebene Strecke mit Leichtigkeit und mit einer an absolute Schärfe grenzenden Genauigkeit zu halbieren, so könnte er wohl auf den Gedanken kommen, der Strecke, welche er messen soll, gerade eine solche Länge zu geben, daß sie sehr nahe eine Potenz von 2 in Beziehung auf den Maßstab vorstellt, diese Strecke also beispiels-

weise nahe 32 (2^5)-mal so lang zu machen, ihre Länge sodann dadurch zu bestimmen, indem er den durch wiederholte Halbierung gewonnenen Teil mit dem Maßstabe mißt und das erhaltene Maß mit 32 multipliziert. Gesetzt nun, man würde auch ganz seinen Glauben über die Vortrefflichkeit seiner Halbierungsmittel teilen, so müßte man ihm doch entschieden abraten, diese Methode anzuwenden; denn er bekommt dadurch für den mittleren Fehler der Länge der ganzen Strecke

$$\mu_v = 32\,\mu.$$

Bedeutet p das Gewicht der tatsächlich durchgeführten Messung und p_v das Gewicht der Bestimmung der ganzen Länge der Strecke, so ist:

$$p_v = \frac{p}{32^2} = \frac{p}{1024}.$$

Mißt man jedoch alle Teile, so bekommt man

$$\mu_v = \mu\sqrt{32} = 5{\cdot}66\,\mu \qquad \text{und} \qquad p_v = \frac{p}{32}.$$

Der Geometer würde also den etwaigen Zeitgewinn mit einer Aufopferung von mehr als $\frac{4}{5}$ der erreichbaren Genauigkeit erkaufen.

2. Beispiel. Als zweites Beispiel wird angenommen, es soll ein metrischer Zentner $= q = 100\,kg$ durch ein vom metrischen verschiedenes Gewichtssystem dargestellt werden. Hiezu sei gegeben: ein Normalkilogramm und ein wenigstens einen metrischen Zentner schwerer Satz Gewichte eines anderen Gewichtssystems (z. B. englische Pfunde o. dgl.), welchen man in allen Unterteilungen als absolut genau anzunehmen ermächtigt wäre. Es handelt sich hier um die Darstellung eines Gewichtes (d. h. die Zusammenstellung gewisser, vielleicht ganz willkürlicher Gewichtsstücke, welche zusammen ein gegebenes Gewicht liefern) und nicht etwa um die Kopierung des dargestellten Gewichtes, d. h. die Anfertigung eines gleichschweren Gewichtsstückes.

Um sich über die Genauigkeit der Arbeit Aufschluß zu verschaffen, muß man im vorhinein wissen oder durch Versuche ermitteln, mit welcher Genauigkeit man mittels einer Wage und der Gewichte des Satzes das Kilogramm darstellen kann. Der mittlere Fehler, der dabei zu befürchten ist, heiße μ. Man sieht sofort, daß man, von der gegebenen Ermächtigung vollständig Gebrauch machend, durch Multiplikation des ermittelten Kilogrammäquivalentes mit 100 das Gewicht finden könnte, welches zusammengelegt den verlangten metrischen Zentner (etwa in englischen Pfunden samt Unterteilungen)

darstellt. Zugleich aber sieht man, daß der hiebei begangene mittlere Fehler 100μ beträgt. Macht man sich jedoch von jener Voraussetzung frei, indem man die Mühe nicht scheut, die Operation des Darstellens eines Kilogramms 99-mal zu wiederholen, so erhält man durch Zusammenlegen aller einzelnen Darstellungen des Kilogramms, die einander nicht vollkommen gleich sein werden, mit dem Normalkilogramm die Darstellung des metrischen Zentners und zwar mit dem mittleren Fehler $\mu\sqrt{99}$. Man erlangt also durch die vermehrte Arbeit eine mehr als $\sqrt{99} = 9{\cdot}95$fache Genauigkeit, selbst in dem Falle, als die obige Voraussetzung über den mitgeteilten Gewichtssatz ganz unzweifelhaft begründet wäre. Zu diesem Urteil hätte man aber auch schon ohne Kenntnis des μ bloß durch Vergleichung der beiden Gewichte $\frac{p}{10000}$ und $\frac{p}{99}$ kommen können.

8. Maß der Präzision und Gewicht des verallgemeinerten Mittels mit Rücksicht auf die verschiedene Genauigkeit der einzelnen Beobachtungen.

Für den wahrscheinlichsten Wert der Unbekannten wurde gefunden bei Beobachtungen gleicher Genauigkeit

$$1)\qquad x = \frac{l_1 + l_2 + \cdots\cdots + l_n}{n} = \frac{[l]}{n}$$

und bei Beobachtungen ungleicher Genauigkeit

$$2)\qquad x = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots\cdots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \cdots\cdots + p_n} = \frac{[p\,l]}{[p]}.$$

Es soll nun die Genauigkeit des durch diese Gleichungen bestimmten wahrscheinlichsten Wertes der Unbekannten durch die Ermittlung des Maßes der Präzision des Mittels angegeben werden. Hiebei wird der allgemeinere Fall — Beobachtungen ungleicher Genauigkeit — zu Grunde gelegt, da der andere aus diesem leicht abgeleitet werden kann.

Bei Beobachtungen verschiedener Genauigkeit wird jedem der beobachteten Werte $l_1, l_2, \ldots\ldots, l_n$ ein anderes Maß der Präzision entsprechen. Sind $h_1, h_2, \ldots\ldots, h_n$ diese Präzisionsmaße, so ist, wenn

$$\lambda_1 = -l_1 + x,\quad \lambda_2 = -l_2 + x,\ \ldots\ldots\ldots,\ \lambda_n = -l_n + x$$

die scheinbaren Fehler der einzelnen Beobachtungen bedeuten, die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens dieser Fehler

$$3)\quad W = \frac{h_1 h_2 \ldots\ldots h_n}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-(h_1^2\lambda_1^2 + h_2^2\lambda_2^2 + \cdots\cdots + h_n^2\lambda_n^2)} (d\lambda)^n.$$

Man kann diese Bedingung noch auf eine andere, für die Praxis bequemere Weise ausdrücken.

Es sei h_0 das Maß der Präzision einer willkürlich gewählten Gattung von Beobachtungen, welche man als Maßstab zur Vergleichung der Beobachtungen $l_1, l_2, \ldots\ldots, l_n$ bezüglich ihrer verschiedenen Genauigkeit annimmt. Als diese willkürliche Beobachtung sei die fingierte Beobachtung gewählt, welcher das Gewicht eins zukommt; es ist dann $\frac{h_i^2}{h_0^2} = \frac{\mu_0^2}{\mu_i^2}$ gleichbedeutend mit p_i. Setzt man also

$$p_1 = \frac{h_1^2}{h_0^2}, \qquad p_2 = \frac{h_2^2}{h_0^2}, \quad \ldots\ldots\ldots, \quad p_n = \frac{h_n^2}{h_0^2},$$

so verwandelt sich der Ausdruck für W, Gleichung 3), in:

$$4) \quad W = \frac{h_0^n \sqrt{p_1 p_2 \ldots\ldots p_n}}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-h_0^2 (p_1 \lambda_1^2 + p_2 \lambda_2^2 + \ldots\ldots + p_n \lambda_n^2)} (d\lambda)^n = \\ = \frac{h_0^n \sqrt{p_1 p_2 \ldots\ldots p_n}}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-h_0^2 [p\lambda\lambda]} (d\lambda)^n.$$

Bezeichnet man für irgend einen anderen Wert der Unbekannten, z. B. für $x + \mathfrak{x}$ die Beobachtungsfehler mit $\delta_1, \delta_2, \ldots\ldots, \delta_n$, so wird:

$$\delta_1 = -l_1 + x + \mathfrak{x} = \lambda_1 + \mathfrak{x},$$
$$\delta_2 = -l_2 + x + \mathfrak{x} = \lambda_2 + \mathfrak{x},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\delta_n = -l_n + x + \mathfrak{x} = \lambda_n + \mathfrak{x}.$$

Quadriert man diese Gleichungen, multipliziert dann jede derselben mit dem zugehörigen Gewichte und addiert sie, so erhält man, da bekanntlich $[p\lambda] = 0$ ist,

$$5) \qquad [p\delta\delta] = [p\lambda\lambda] + [p]\,\mathfrak{x}^2;$$

demnach folgt für die Wahrscheinlichkeit W_1 des Wertes $x + \mathfrak{x}$ die Formel:

$$6) \qquad W_1 = \frac{h_0^n \sqrt{p_1 p_2 \ldots\ldots p_n}}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-h_0^2 \left\{ [p\lambda\lambda] + [p]\,\mathfrak{x}^2 \right\}} (d\lambda)^n.$$

Es verhält sich sonach die Wahrscheinlichkeit W, daß der Wert $x = \frac{[pl]}{[p]}$ der wahre Wert sei oder den Fehler $= 0$ habe, zur Wahrscheinlichkeit W_1, daß er um die Größe $\mathfrak{x}$ fehlerhaft sei, wie

$$1 : e^{-h_0^2 [p]\,\mathfrak{x}^2}.$$

Bezeichnet man also das Maß der Präzision des verallgemeinerten Mittels $x = \frac{[pl]}{[p]}$ mit h_x, so hat man vermöge der im Punkte 8 des II. Abschnittes erhaltenen Schlußfolgerung:

$$7) \qquad h_x = h_0 \sqrt{[p]};$$

bedeutet ferner p_x das Gewicht des verallgemeinerten Mittels x, so ist $p_x : 1 = h_x^2 : h_0^2$, somit

$$8) \qquad p_x = [p].$$

Das Gewicht des verallgemeinerten Mittels ist demnach gleich der Summe der Gewichte der einzelnen Beobachtungen.

Da allgemein für den mittleren Fehler die Beziehung gilt $\mu = \frac{1}{h\sqrt{2}}$, so hat man für den mittleren Fehler μ_0 der fingierten Beobachtung vom Gewichte eins und für den mittleren Fehler μ_x des arithmetischen Mittels:

$$9) \qquad \mu_0 = \frac{1}{h_0\sqrt{2}},$$

$$10) \qquad \mu_x = \frac{1}{h_x\sqrt{2}};$$

daher ist mit Rücksicht auf 7) und 9):

$$11) \qquad \mu_x = \frac{\mu_0}{\sqrt{[p]}}.$$

Vergleicht man diese Formel mit der im Punkte 4 dieses Abschnittes abgeleiteten Formel $\mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{n}}$, so erkennt man, daß das verallgemeinerte Mittel äquivalent ist einem gewöhnlichen arithmischen Mittel aus $[p]$ Beobachtungen vom Gewichte eins, wie dies bereits im Punkte 5 dieses Abschnittes angeführt erscheint.

9. Bestimmung des Maßes der Präzision der Beobachtung vom Gewichte Eins.*)

Die Größen

$$1) \qquad h_x = h_0 \sqrt{[p]}, \qquad \mu_0 = \frac{1}{h_0\sqrt{2}}, \qquad \mu_x = \frac{1}{h_x\sqrt{2}}$$

hängen nur noch von der Größe h_0, d. i. dem Maße der Präzision der Gewichtseinheit ab, und es ist klar, daß zur Bestimmung dieses

*) Siehe auch Punkt 9 des II. Abschnittes.

Maßes kein anderes Mittel zu Gebote steht, als die Fehler der Beobachtungen selbst. Bedeuten $-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, \ldots\ldots, -\varepsilon_n$ die **wahren** Beobachtungsfehler, so ist die Wahrscheinlichkeit für deren Zusammentreffen:

$$2) \qquad W = \frac{h_0^n \sqrt{p_1 p_2 \ldots\ldots p_n}}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-h_0^2 [p\varepsilon\varepsilon]} (d\varepsilon)^n.$$

Da nun diese Fehler wirklich eingetreten, folglich einer Änderung nicht fähig sind, hängt diese Wahrscheinlichkeit nur noch von dem Werte h_0 ab, und es wird jener Wert von h_0 der wahrscheinlichste sein, für welchen die Wahrscheinlichkeit W des Zusammentreffens der wirklich eingetretenen Beobachtungsfehler ein Maximum wird. Dies gibt die Bedingung $\frac{dW}{dh_0} = 0$, oder

$$n h_0^{n-1} e^{-h_0^2 [p\varepsilon\varepsilon]} - 2 h_0^n e^{-h_0^2 [p\varepsilon\varepsilon]} h_0 [p\varepsilon\varepsilon] = 0,$$

das ist

$$3) \qquad n - 2 h_0^2 [p\varepsilon\varepsilon] = 0;$$

hieraus folgt nun

$$4) \qquad h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{[p\varepsilon\varepsilon]}};$$

hiemit verwandelt sich die Gleichung $\mu_0 = \frac{1}{h_0\sqrt{2}}$ in:

$$5) \qquad \mu_0 = \sqrt{\frac{[p\varepsilon\varepsilon]}{n}}.$$

Die wahren Beobachtungsfehler $-\varepsilon$ sind aber unbekannt; man kennt nur ihre wahrscheinlichsten Werte, d. i. die scheinbaren Fehler $\lambda_i = -l_i + x$, $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$. Bezeichnet man mit $x + \mathfrak{x}$ den wahren Wert der Unbekannten, so ist $\varepsilon_i = -l_i + x + \mathfrak{x} = \lambda_i + \mathfrak{x}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Quadriert man diese Gleichungen, multipliziert sodann jede derselben mit dem zugehörigen Gewichte und addiert sie, so erhält man, da bekanntlich $[p\lambda] = 0$ ist,

$$6) \qquad [p\varepsilon\varepsilon] = [p\lambda\lambda] + [p]\mathfrak{x}^2.$$

Weil nun $[p]\mathfrak{x}^2$ eine wesentlich positive Größe bedeutet, so ist $[p\lambda\lambda]$ jedenfalls kleiner als $[p\varepsilon\varepsilon]$, was auch schon daraus folgt, daß jeder noch so wenig vom arithmetischen Mittel verschiedene Wert notwendig eine größere Summe der Fehlerquadrate geben muß. Der Wert von $\mathfrak{x}$ ist nun allerdings unbekannt; da aber die Gleichung 6) andeutet, daß der Wert von $[p\lambda\lambda]$ jedenfalls vergrößert werden muß,

so wird man sich der Wahrheit so weit nähern, als es die Umstände erlauben, wenn man für $\mathfrak{x}$ den mittleren Fehler des arithmetischen Mittels nimmt und somit $\mathfrak{x} = \mu_x = \frac{\mu_0}{\sqrt{[p]}}$ setzt, wodurch die Gleichung 6) in $[p \varepsilon \varepsilon] = [p \lambda \lambda] + \mu_0^2$ übergeht. Durch Verbindung dieser Gleichung mit Gleichung 5) erhält man sofort

$$7) \qquad [p \varepsilon \varepsilon] = \frac{n}{n-1} [p \lambda \lambda]$$

und

$$8) \qquad \mu_0 = \sqrt{\frac{[p \lambda \lambda]}{n-1}}.$$

Hiemit ist nun der mittlere Fehler der Gewichtseinheit bestimmt; die Gleichung $\mu_x = \frac{\mu_0}{\sqrt{[p]}}$ gibt dann den mittleren Fehler des arithmetischen Mittels.

Bedeuten r_0 und r_x die wahrscheinlichen Fehler der Gewichtseinheit und des arithmetischen Mittels, so ist:

$$r_0 = 0{\cdot}67449\, \mu_0, \qquad r_x = 0{\cdot}67449\, \mu_x.$$

Zufolge $h_0 = \frac{1}{\mu_0 \sqrt{2}}$ und Gleichung 8) ergibt sich für das Maß der Präzision der Gewichtseinheit:

$$9) \qquad h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n-1}{[p \lambda \lambda]}}.$$

10. Bestimmung der wahrscheinlichen Grenzen der Unsicherheit der mittleren und der wahrscheinlichen Fehler.

Die in diesem Abschnitte angegebene Bestimmung der Größen μ, r, ϑ, μ_0, μ_x, ..., h_0, h, h_x aus den scheinbaren Fehlern der Beobachtungen ist selbstverständlich nicht als absolut genau zu betrachten, sondern gibt nur die wahrscheinlichsten Werte derselben; es soll nun der Grad der Genauigkeit dieser Bestimmung untersucht werden. Bedeuten wieder $-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, \ldots\ldots, -\varepsilon_n$ die wahren Beobachtungsfehler, n an der Zahl, so ist für irgend einen Wert von h_0 die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens dieser Fehler

$$1) \qquad W = \frac{(d\varepsilon)^n h_0^n \sqrt{p_1 p_2 \ldots\ldots p_n}}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-h_0^2 [p \varepsilon \varepsilon]},$$

denn die Wahrscheinlichkeiten für die Fehler $-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, \ldots\ldots, -\varepsilon_n$ sind, wenn wieder $d\varepsilon$ als konstanter Spielraum für dieselben angenommen wird:

$$\frac{h_0 \sqrt{p_1}}{\sqrt{\pi}} e^{-h_0^2 p_1 \varepsilon_1^2} d\varepsilon, \quad \frac{h_0 \sqrt{p_2}}{\sqrt{\pi}} e^{-h_0^2 p_2 \varepsilon_2^2} d\varepsilon, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{h_0 \sqrt{p_n}}{\sqrt{\pi}} e^{-h_0^2 p_n \varepsilon_n^2} d\varepsilon.$$

Logarithmiert man die Gleichung 1) nach der Basis e, so findet man

$$2) \quad l\,W = l(d\varepsilon)^n + l\sqrt{p_1 p_2 \ldots\ldots p_n} - l(\pi^{\frac{n}{2}}) + n\,l\,h_0 - h_0^2 [p\varepsilon\varepsilon].$$

Für einen anderen Wert von h_0, etwa $h_0 + \xi$, wird diese Wahrscheinlichkeit:

$$l\,W_1 = l(d\varepsilon)^n + l\sqrt{p_1 p_2 \ldots\ldots p_n} - l(\pi^{\frac{n}{2}}) + n\,l(h_0 + \xi) - (h_0 + \xi)^2 [p\varepsilon\varepsilon].$$

Es ist aber

$$l(h_0 + \xi) = l\left[h_0\left(1 + \frac{\xi}{h_0}\right)\right] = l\,h_0 + l\left(1 + \frac{\xi}{h_0}\right) =$$
$$= l\,h_0 + \frac{\xi}{h_0} - \frac{1}{2}\frac{\xi^2}{h_0^2} + \frac{1}{3}\frac{\xi^3}{h_0^3} - \ldots\ldots,^{*)}$$

folglich, wenn man nach Potenzen von ξ ordnet:

$$3) \quad l\,W_1 = l(d\varepsilon)^n + l\sqrt{p_1 p_2 \ldots\ldots p_n} - l\,\pi^{\frac{n}{2}} + n\,l\,h_0 - h_0^2 [p\varepsilon\varepsilon] +$$
$$+ \left(\frac{n}{h_0} - 2h_0 [p\varepsilon\varepsilon]\right)\xi - \left(\frac{n}{2h_0^2} + [p\varepsilon\varepsilon]\right)\xi^2 + \frac{n}{3h_0^3}\xi^3 - \ldots\ldots$$

Durch Subtraktion der Gleichung 2) von 3) erhält man:

$$4) \quad l\frac{W_1}{W} = \frac{1}{h_0}\left(n - 2h_0^2 [p\varepsilon\varepsilon]\right)\xi - \frac{1}{2h_0^2}\left(n + 2h_0^2 [p\varepsilon\varepsilon]\right)\xi^2 +$$
$$+ \frac{n}{3h_0^3}\xi^3 - \ldots\ldots$$

Diese Gleichung liefert zunächst wieder den schon bereits im vorigen Punkte [Gleichung 3)] erhaltenen wahrscheinlichsten Wert von h_0, indem für diesen Wert W ein Maximum, also $l\,W_1 - l\,W$ für jeden Wert von ξ negativ werden muß, was nur möglich ist, wenn der Koeffizient der ersten Potenz von ξ in 4) verschwindet, d. h. wenn $n - 2h_0^2 [p\varepsilon\varepsilon] = 0$ ist, übereinstimmend mit Gleichung 3) des vorigen Punktes. Durch Substitution dieses wahrscheinlichsten Wertes von h_0 verwandelt sich die Gleichung 4) mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\frac{\xi}{h_0}$ in:

$$l\frac{W_1}{W} = -\frac{n}{h_0^2}\xi^2, \quad \text{oder} \quad \frac{W_1}{W} = e^{-\frac{n}{h_0^2}\xi^2}.$$

---

*) Die logarithmische Reihe lautet:

$$l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots, \text{ giltig für } -1 < x \leqq +1.$$

Es verhält sich also die Wahrscheinlichkeit W, daß $h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{[p\varepsilon\varepsilon]}}$ der wahre Wert sei (den Fehler $= 0$ habe), zur Wahrscheinlichkeit W_1, daß $h_0 + \xi$ der wahre Wert (also h_0 um ξ fehlerhaft) sei, wie $1 : e^{-\frac{n}{h_0^2}\xi^2}$. Es ist also nach Punkt 8 des II. Abschnittes $\frac{\sqrt{n}}{h_0}$ das Maß der Präzision der Bestimmung von h_0, folglich vermöge der Gleichungen 6) und 7) des Punktes 5 des III. Abschnittes $\frac{\varrho h_0}{\sqrt{n}}$ der wahrscheinliche Fehler derselben, oder es ist ebenso wahrscheinlich, daß der wahre Wert von h_0 zwischen den Grenzen

$$h_0 - \frac{\varrho h_0}{\sqrt{n}} = h_0\left(1 - \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{und} \quad h_0 + \frac{\varrho h_0}{\sqrt{n}} = h_0\left(1 + \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right)$$

liege als außerhalb derselben, oder man kann 1 gegen 1 wetten, daß er innerhalb derselben liege.

Da ferner der mittlere Fehler $\mu = \frac{1}{h_0\sqrt{2}}$ ist, so sind die wahrscheinlichen Grenzen desselben

$$\frac{1}{h_0\sqrt{2}\left(1 \pm \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{\mu}{1 \pm \frac{\varrho}{\sqrt{n}}};$$

ist $\frac{\varrho}{\sqrt{n}}$ sehr klein, so erhält man hiefür durch Division mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\frac{\varrho}{\sqrt{n}}$ genügend genau:

$$\mu\left(1 \mp \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right).$$

Dasselbe gilt infolge des konstanten Verhältnisses zwischen dem mittleren und wahrscheinlichen Fehler auch für letzteren; man erhält also die wahrscheinlichen Grenzen der Unsicherheit der nach den Formeln

$$\mu = \frac{1}{h_0\sqrt{2}}, \qquad r = \frac{\varrho}{h_0}$$

bestimmten mittleren und wahrscheinlichen Fehler, wenn man letztere mit

$$1 \mp \frac{0{\cdot}47694}{\sqrt{n}}$$

multipliziert, wobei n die Anzahl der Beobachtungen bedeutet.

Die Grenzen, innerhalb welcher die aus den Beobachtungen hergeleiteten μ und r, sowie auch die daraus folgenden Fehler des arithmetischen Mittels zuverlässig sind, werden immer enger, je größer die Anzahl der Beobachtungen ist, und zwar kann man 1 gegen 1 wetten, daß die wahren Werte dieser vier Größen jedesmal zwischen den beiden Werten liegen, welche man erhält, wenn man diese Größen mit

$$1 \mp \frac{0{\cdot}47694}{\sqrt{n}}$$

multipliziert. Um zu sicheren Resultaten zu gelangen, darf man sonach mit Wiederholung der Beobachtungen nicht allzu sparsam sein. Man erkennt ferner, daß eine unendliche Anzahl von Beobachtungen erforderlich wäre, um das arithmetische Mittel der Beobachtungen für die Wahrheit selbst halten zu dürfen.

Beispiel. Aus 30 gleich genauen Beobachtungen eines Winkels wurde als wahrscheinlichster Wert desselben gefunden $x = 49^0 1' 17{\cdot}763''$; weiter wurde ermittelt:

der mittlere Fehler einer Beobachtung

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}} = 0{\cdot}644'',$$

der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung

$$r = 0{\cdot}6745\,\mu = 0{\cdot}435'',$$

der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels

$$\mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{n}} = 0{\cdot}118'',$$

der wahrscheinliche Fehler des arithmetischen Mittels

$$r_x = 0{\cdot}6745\,\mu_x = 0{\cdot}079''.$$

Man könnte somit, insoferne nur diese 30 Beobachtungen in Betracht kämen, und dieselben von jedem konstanten Fehler frei wären, 1 gegen 1 wetten, daß der wahre Wert des Winkels zwischen $x + r_x$ und $x - r_x$, d. i. zwischen $49^0 1' 17{\cdot}842''$ und $49^0 1' 17{\cdot}684''$, und daß der wahre Wert des wahrscheinlichen Fehlers innerhalb der Grenzen

$$r_x\left(1 \mp \frac{0{\cdot}47694}{\sqrt{n}}\right)$$

d. i. zwischen $0{\cdot}072''$ und $0{\cdot}086''$ liege. Analoges gilt für den mittleren Fehler μ_x.

11. Verwendung von Beobachtungsdifferenzen zur Genauigkeitsbestimmung.

Der Gedanke, zur Beurteilung der Genauigkeit einer Beobachtungsreihe statt der Abweichungen der einzelnen Beobachtungen vom arithmetischen Mittel ihre Abweichungen untereinander, mit anderen Worten, statt der scheinbaren Verbesserungen die Beobachtungsdifferenzen zu verwenden, ist von Jordan bereits im Jahre 1869 ausgegangen, sodann von Andrae und Helmert weiter ausgebildet worden.

Sind $l_1, l_2, \ldots\ldots, l_n$ die Resultate von n gleich genauen Beobachtungen, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_n$ die wahren, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n$ die scheinbaren Verbesserungen, so daß $l_i + \varepsilon_i$ den wahren Wert der Unbekannten, $l_i + \lambda_i$ das aus den Beobachtungen abgeleitete arithmetische Mittel bedeutet, so ist:

$$l_i + \varepsilon_i = l_k + \varepsilon_k, \qquad l_i + \lambda_i = l_k + \lambda_k,$$

folglich

$$l_i - l_k = \varepsilon_k - \varepsilon_i = \lambda_k - \lambda_i.$$

Jede Beobachtungsdifferenz ist hiernach gleich dem Unterschiede der wahren oder scheinbaren Verbesserungen der zur Differenzbildung herangezogenen Beobachtungen.

Befolgen die Einzelfehler das Gesetz $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$, so unterliegen, wie sich nachweisen läßt, die Differenzen, welche allgemein durch Δ bezeichnet werden mögen, dem Gesetze:

$$\frac{h}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h^2}{2} \Delta^2}.$$

Die Reihe der Beobachtungsdifferenzen verhält sich also wie eine Reihe von Beobachtungsfehlern mit dem Präzisionsmaß $\frac{h}{\sqrt{2}}$.

Hiernach ist der Mittelwert von $|\Delta|$ $\left(\text{wegen } \vartheta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}\right)$ gleich $\frac{\sqrt{2}}{h\sqrt{\pi}}$, also auch gleich $\vartheta\sqrt{2}$, und der Mittelwert von Δ^2 (wegen $\mu = \frac{1}{h\sqrt{2}}$) gleich $\frac{1}{h^2}$, mithin auch gleich $2\mu^2$. Stehen also s (unabhängige) Beobachtungsdifferenzen $\Delta_1, \Delta_2, \ldots\ldots, \Delta_s$ zur Verfügung,

so kann man, da diese Differenzen den Charakter **wahrer** Fehler und nicht bloß scheinbarer Fehler haben, je größer s, um so sicherer setzen:

$$\vartheta\sqrt{2} = \frac{[|\Delta|]}{s}, \qquad 2\mu^2 = \frac{[\Delta\Delta]}{s},$$

woraus sich für ϑ und μ die Bestimmungen ergeben:

1) $$\vartheta = \frac{[|\Delta|]}{s\sqrt{2}},$$

2) $$\mu = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{2s}}.$$

Aus n Beobachtungen $l_1, l_2, \ldots\ldots, l_n$ lassen sich $s = \frac{n(n-1)}{2}$ verschiedene Paare und eben so viele Differenzen bilden. Denkt man sich beispielsweise die Beobachtungen nach steigender Größe geordnet, so ergeben sich die folgenden durchwegs positiven Differenzen:

3) $$\begin{cases} l_2 - l_1, \\ l_3 - l_1, \quad l_3 - l_2, \\ l_4 - l_1, \quad l_4 - l_2, \quad l_4 - l_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_n - l_1, \quad l_n - l_2, \quad l_n - l_3, \ldots\ldots\ldots, l_n - l_{n-1}. \end{cases}$$

Diese sind aber nicht unabhängig voneinander; vielmehr lassen sich aus n Beobachtungen nur $n-1$ unabhängige Differenzen ableiten; trotzdem gelten, wie **Andrae** und **Helmert** nachgewiesen haben, bei Verwendung aller Differenzen die Formeln:

4) $$\vartheta = \frac{[|\Delta|]\sqrt{2}}{n(n-1)},$$

5) $$\mu = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n(n-1)}}.$$

Die Richtigkeit der Formel 5) hat **Andrae** wie folgt bewiesen: Man kann nämlich an die Stelle des Schema 3) das folgende setzen:

6) $$\begin{cases} \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \quad \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_4, \quad \varepsilon_2 - \varepsilon_4, \quad \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_n, \quad \varepsilon_2 - \varepsilon_n, \quad \varepsilon_3 - \varepsilon_n, \ldots\ldots\ldots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n \end{cases}$$

und findet nun durch Summierung der Quadrate mit der Beachtung, daß jedes einzelne ε^2 sich $(n-1)$-mal vorfindet,

$$[\Delta\Delta] = (n-1)[\varepsilon\varepsilon] - 2[\varepsilon_i\varepsilon_k], \qquad i<k;$$

es ist aber identisch

$$[\varepsilon]^2 = [\varepsilon\varepsilon] + 2[\varepsilon_i\varepsilon_k],$$

daher

$$[\Delta\Delta] = n[\varepsilon\varepsilon] - [\varepsilon]^2;$$

anderseits ist aber im Punkte 2 [Gleichung 14)] dieses Abschnittes die Relation

$$n[\lambda\lambda] = n[\varepsilon\varepsilon] - [\varepsilon]^2$$

gefunden worden, folglich ist

$$[\Delta\Delta] = n[\lambda\lambda].$$

Die Anzahl der Differenzen Δ ist $\frac{n(n-1)}{2}$; das mittlere Quadrat D^2 von Δ beträgt also:

$$D^2 = \frac{[\Delta\Delta]}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2[\Delta\Delta]}{n(n-1)} = \frac{2[\lambda\lambda]}{n-1},$$

daraus

$$D = \sqrt{\frac{2[\Delta\Delta]}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{2[\lambda\lambda]}{n-1}}.$$

Weil ferner $\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}} = \mu$, hat man $D = \mu\sqrt{2}$ und

$$\mu = \frac{D}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n(n-1)}}.$$

Die beiden Formeln

$$\mu = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n(n-1)}} \qquad \text{und} \qquad \mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}$$

haben sonach völlig gleichen Inhalt; welcher von beiden man aus praktischen Gründen den Vorzug zu geben hat, kann keinen Augenblick zweifelhaft sein, wenn man die Anzahl n der λ einerseits und die Anzahl $\frac{n(n-1)}{2}$ der Δ anderseits ins Auge faßt.

Für die Formel 4) hat Helmert einen strengen Beweis geliefert, nachdem dieselbe vorher schon von Andrae, jedoch nicht in allgemeiner Gültigkeit, abgeleitet worden war.

Auf Grund des Schema 6) ist der Mittelwert von $[|\varDelta|]$ gleich dem Mittelwerte von $[|\varepsilon_i - \varepsilon_k|]$, $i < k$, und da jede der Differenzen $|\varepsilon_i - \varepsilon_k|$ denselben Mittelwert, nämlich $\vartheta\sqrt{2}$ hat, so ist:

$$[|\varDelta|] = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \vartheta\sqrt{2}, \text{ daraus } \vartheta = \frac{[|\varDelta|]\sqrt{2}}{n(n-1)}, \text{ übereinstimmend mit 4).}$$

Beispiel. Doppelmessungen. Zur Übung soll noch ein besonderer Fall zweier Beobachtungen, die sogenannte Doppelmessung, näher betrachtet werden. Als Beispiele solcher Doppelmessungen seien angeführt: Die Messung der Länge einer Strecke in zwei entgegengesetzten Richtungen und die Bestimmung des Höhenunterschiedes zweier Punkte durch zwei Nivellierungen, eine Hin- und eine Rückmessung.

Sind l_1 und l_2 die Ergebnisse einer solchen Doppelmessung mit der Differenz $l_1 - l_2 = \varDelta$, so hat man für das arithmetische Mittel (den wahrscheinlichsten Wert) $x = \frac{l_1 + l_2}{2}$ und für die scheinbaren Fehler $\lambda_1 = -l_1 + x = -\frac{\varDelta}{2}$, $\lambda_2 = -l_2 + x = +\frac{\varDelta}{2}$. Es ist also der mittlere Fehler einer Messung:

$$7) \qquad \mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}} = \sqrt{\frac{\varDelta^2}{4} + \frac{\varDelta^2}{4}} = \frac{\varDelta}{\sqrt{2}} = 0{\cdot}707\,\varDelta,$$

ferner der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels:

$$8) \qquad \mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{n}} = \frac{\varDelta}{2} = 0{\cdot}5\,\varDelta.$$

Aus $\mu = \frac{\varDelta}{\sqrt{2}}$ folgt: $\varDelta = \mu\sqrt{2}$, d. h. die zu erwartende Differenz einer Doppelmessung ist gleich dem $\sqrt{2}$-fachen mittleren Fehler einer Messung.

Angenommen, es liegen nun mehrere solche Wiederholungsmessungen vor. Man habe z. B. verschiedene Längenstrecken, jede hin und her, oder verschiedene Nivellierungsstrecken, jede für sich hin und her, gemessen, und in jedem dieser Fälle eine Differenz $\varDelta$ erhalten. Der Einfachheit halber sei angenommen, daß die Differenzen $\varDelta$ Messungen angehören, welchen gleiche Gewichte zukommen. Man kann alsdann aus einer Anzahl s solcher Differenzen eine mittlere Differenz berechnen nach der Formel:

$$9) \qquad D^2 = \frac{\varDelta_1^2 + \varDelta_2^2 + \cdots\cdots + \varDelta_s^2}{s}, \qquad D = \sqrt{\frac{[\varDelta\varDelta]}{s}}.$$

Da die Differenzen $\varDelta$ den Charakter wahrer und nicht bloß den der scheinbaren Verbesserungen haben, so ist der Nenner s streng richtig und nicht etwa durch $s-1$ zu ersetzen.

Aus 7), 8) und 9) folgt nun, indem man die mittlere Differenz D an Stelle der einzelnen Differenz $\varDelta$ in 7) und 8) einführt:

mittlerer Fehler einer Messung $\mu = \sqrt{\frac{[\varDelta\varDelta]}{2s}}$,

mittlerer Fehler einer Doppelmessung $\mu_x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[\varDelta\varDelta]}{s}}$.

V. Abschnitt.

Vermittelnde Beobachtungen.

1. Stellung der Aufgabe. Vorteilhafteste Kombination der Beobachtungen nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate.

Eine der unmittelbaren Beobachtung zugängliche Größe V stehe mit den Unbekannten $X, Y, Z, \ldots\ldots$, deren Anzahl u sei, in der Beziehung

$$V = a\,X + b\,Y + c\,Z + \cdots\cdots$$

Zu jeder Beobachtung l_i von V gehöre ein System von Werten

$$a_i,\ b_i,\ c_i,\ \ldots\ldots$$

der Koeffizienten, welche entweder a priori bekannt sind oder durch Beobachtung festgestellt wurden und in diesem Falle als frei von Fehlern anzusehen sind. Ist ε_i die wahre Verbesserung von l_i, so gibt diese Beobachtung Anlaß zu der Gleichung:

$$1)\qquad \varepsilon_i = -l_i + a_i X + b_i Y + c_i Z + \cdots\cdots.$$

Werden n voneinander unabhängige Beobachtungen angestellt, so ergibt sich ein System von n Gleichungen der Form 1).

Wäre $n = u$ und setzte man die unbekannten Verbesserungen ε_i sämtlich gleich Null, so ergäbe sich ein zur Bestimmung der Werte der Unbekannten gerade ausreichendes System. Diese Werte wären aber nicht die wahren, denn die Beobachtungen sind mit unvermeidlichen Fehlern behaftet; auch gäbe es kein Mittel, die Genauigkeit der gefundenen Werte zu beurteilen.

Ist jedoch $n > u$, dann eröffnet sich die Möglichkeit einer mehrfachen Bestimmung von Werten der Unbekannten: man braucht nur auf alle möglichen Arten u Gleichungen auszuwählen, überall $\varepsilon_i = 0$ zu setzen und nach den Unbekannten aufzulösen. In der Nichtübereinstimmung der verschiedenen Lösungen äußert sich

der **Widerspruch**, der von der Fehlerhaftigkeit der Beobachtungsresultate $l_1, l_2, \ldots\ldots, l_n$ herrührt.

Es entsteht daher die Aufgabe, das ganze System von Gleichungen, welches überschüssige oder überzählige Beobachtungen enthält, derart zu kombinieren, daß sich eine einzige Lösung für die Unbekannten ergibt und gleichzeitig gewissen Anforderungen bezüglich der Beschaffenheit dieser Lösung genügt wird.

Bezeichnet man das vorteilhafteste Wertsystem der Unbekannten mit $x, y, z, \ldots\ldots$, so führt dasselbe zu analogen Gleichungen wie das System der wahren Werte, nämlich zu den sogenannten **Fehlergleichungen**:

$$2)\qquad \lambda_i = -l_i + a_i x + b_i y + c_i z + \ldots\ldots, \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, n,$$

in welchen die linken Seiten nicht die wahren, sondern die scheinbaren Verbesserungen der Beobachtungen vorstellen. **Das System** 2) **muß widerspruchsfrei in dem Sinne sein, daß aus irgend** u **ausgewählten Gleichungen sich dieselben Werte für** $x, y, z, \ldots\ldots$ **ergeben wie aus irgend einer anderen Auswahl von** u **Gleichungen.**

Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf drei Unbekannte, weil die Verallgemeinerung der Resultate auf u Unbekannte keine Schwierigkeit darbietet. Bevor in der Untersuchung weiter gegangen wird, soll zunächst das bisher Gesagte auf den speziellen Fall von drei Unbekannten übertragen werden.

Die Beobachtungen, von welchen zunächst nur drei vorausgesetzt werden mögen, hätten ergeben:

$$\left.\begin{matrix} l_1, & a_1, & b_1, & c_1, \\ l_2, & a_2, & b_2, & c_2, \\ l_3, & a_3, & b_3, & c_3; \end{matrix}\right\}$$

(zu jedem Beobachtungswerte l gehört ein anderes System der bekannten Koeffizienten a, b, c;)

würde man bei diesen drei Beobachtungen bleiben, so hätte man zur Bestimmung der Unbekannten die drei Gleichungen

$$3)\qquad \left\{\begin{array}{l} l_1 = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z, \\ l_2 = a_2 X + b_2 Y + c_2 Z, \\ l_3 = a_3 X + b_3 Y + c_3 Z. \end{array}\right.$$

Diese Gleichungen wären jedoch nur dann legitim (rechtmäßig), wenn die l fehlerfrei wären. Da man nun **sicher** weiß, daß sie es nicht sind, so können die hieraus sich ergebenden Werte von X, Y, Z nicht als die wahren Werte der zu suchenden Unbekannten angesehen werden.

In Wirklichkeit wird man sich also nicht mit nur soviel Beobachtungen zufrieden stellen, als Unbekannte vorhanden sind, man

wird vielmehr noch weitere (überschüssige oder überzählige) Beobachtungen machen und zwar:

$$\begin{array}{llll} l_4, & a_4, & b_4, & c_4, \\ l_5, & a_5, & b_5, & c_5, \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_n, & a_n, & b_n, & c_n; \end{array}$$

es wird also stets $n > u$, hier $n > 3$, vorausgesetzt. Mit diesen weiteren Beobachtungen könnten ebenfalls Gleichungen von der Form 3) aufgestellt werden. Die Unzulässigkeit eines solchen gleichzeitig bestehenden Systems von Gleichungen ist aber leicht einzusehen: Wenn man nämlich die aus den drei Gleichungen 3) berechneten Werte von X, Y, Z in die späteren Gleichungen einsetzt, so werden diese niemals befriedigt. Wählt man aus den n Gleichungen irgend drei Gleichungen aus, so wird sich dasselbe ereignen; nämlich die aus den drei ausgewählten Gleichungen bestimmten Werte von X, Y, Z werden nur diese drei Gleichungen befriedigen und die anderen $n - 3$ Gleichungen hingegen nicht.

Man muß also auf die Fehler, welche den Beobachtungsgrößen l anhaften, Rücksicht nehmen, indem man folgendes Gleichungssystem aufstellt:

$$4) \quad \left\{ \begin{array}{l} l_1 + \varepsilon_1 = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z, \\ l_2 + \varepsilon_2 = a_2 X + b_2 Y + c_2 Z, \\ \vdots \\ l_n + \varepsilon_n = a_n X + b_n Y + c_n Z. \end{array} \right.$$

In diesem Gleichungssystem treten die Unbekannten X, Y, Z und die für immer unbekannt bleibenden Verbesserungen ε auf. Wegen dieser Verbesserungen ε ist das System der Gleichungen 4) zu einer weiteren Rechnung ganz unverwendbar; es ist daher ganz unmöglich, die wahren Werte X, Y, Z zu bestimmen. Es muß somit das Problem anders und zwar wie folgt formuliert werden: Nachdem man die wahren Werte X, Y, Z nicht bestimmen kann, begnügt man sich mit der Bestimmung anderer Werte, welche ξ, η, ζ heißen mögen und gewissen, gleich anzuführenden Anforderungen genügen müssen. Für irgend ein angenommenes Wertsystem von ξ, η, ζ erhält man ein bestimmtes Wertsystem von Fehlern $-\delta_1$, $-\delta_2$, ..., $-\delta_n$, welches dem folgenden Gleichungssystem Genüge leistet:

$$5)\quad \begin{cases} \delta_1 = -l_1 + a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta, \\ \delta_2 = -l_2 + a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta, \\ \vdots \\ \delta_n = -l_n + a_n\xi + b_n\eta + c_n\zeta. \end{cases}$$

Man schenkt nun jenem Wertsystem von ξ, η, ζ das größte Vertrauen, für welches die Summe der Fehlerquadrate

$$6)\quad \delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots\cdots + \delta_n^2 \text{ ein Minimum}$$

wird. Dieses System von ξ, η, ζ wird dann, wenn das Gaußsche Fehlergesetz als geltend angenommen wird, zugleich das wahrscheinlichste sein, weil die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen dieser n Fehler ein Maximum wird. Zur Bestimmung der vorteilhaftesten Werte von ξ, η, ζ hat man also die Methode der kleinsten Quadrate anzuwenden.

Die vorteilhaftesten (wahrscheinlichsten oder plausiblen) Werte der Unbekannten seien nachstehend stets mit x, y, z, die wahren Werte der Unbekannten mit X, Y, Z, endlich ein beliebiges Wertsystem der Unbekannten mit ξ, η, ζ bezeichnet.

2. Bildung der Normalgleichungen.

Die Bedingung 6) kann mit Rücksicht auf 5) geschrieben werden:

$$(-l_1 + a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta)^2 + (-l_2 + a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta)^2 + \cdots\cdots + \\ + (-l_n + a_n\xi + b_n\eta + c_n\zeta)^2 \quad \text{ein Minimum}$$

Die Bedingungsgleichungen hiefür erhält man, wenn die ersten Differentialquotienten dieses Ausdruckes nach ξ, η und ζ gleich Null gesetzt werden; hiedurch ergibt sich, wenn in denselben gleichzeitig x, y, z statt ξ, η, ζ geschrieben wird: *)

$$7)\quad \begin{cases} (-l_1 + a_1x + b_1y + c_1z)\,a_1 + (-l_2 + a_2x + b_2y + c_2z)\,a_2 + \\ \qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots + (-l_n + a_nx + b_ny + c_nz)\,a_n = 0, \\ (-l_1 + a_1x + b_1y + c_1z)\,b_1 + (-l_2 + a_2x + b_2y + c_2z)\,b_2 + \\ \qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots + (-l_n + a_nx + b_ny + c_nz)\,b_n = 0, \\ (-l_1 + a_1x + b_1y + c_1z)\,c_1 + (-l_2 + a_2x + b_2y + c_2z)\,c_2 + \\ \qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots + (-l_n + a_nx + b_ny + c_nz)\,c_n = 0, \end{cases}$$

*) Wegen einfacherer Berufung auf die betreffenden Gleichungen erfolgt in den ersten drei Punkten dieses Abschnittes die Numerierung der Gleichungen durchlaufend.

oder kürzer geschrieben, indem man nach den Unbekannten ordnet:

$$8)\qquad \begin{cases} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z = [a\,l], \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z = [b\,l], \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z = [c\,l]. \end{cases}$$

Die Zahl der Gleichungen stimmt mit der Zahl der zu bestimmenden Unbekannten überein. Durch das Gleichungssystem 8) sind die vorteilhaftesten Werte der Unbekannten eindeutig bestimmt, sofern die Determinante der Koeffizienten der Unbekannten nicht verschwindet. Man nennt die Gleichungen 8) das System der Normalgleichungen des Problems.

Die Fehler $-\delta$ in 5) entstehen, wenn man für die Unbekannten ein beliebiges Wertsystem ξ, η, ζ supponiert; nimmt man jedoch für die Unbekannten die vorteilhaftesten Werte x, y, z an, so erhält man das System der scheinbaren oder plausiblen Fehler der Beobachtungen l, nämlich:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\,l_1 + a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z, \\ \lambda_2 &= -\,l_2 + a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z, \\ &\vdots \\ \lambda_n &= -\,l_n + a_n\,x + b_n\,y + c_n\,z. \end{aligned}$$

Ersetzt man demgemäß in 7) die Klammerausdrücke durch λ_1, λ_2, ..., λ_n, so resultiert:

$$9)\qquad \begin{cases} [a\,\lambda] = 0, \\ [b\,\lambda] = 0, \\ [c\,\lambda] = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen stellen die Bedingungen dar, unter welchen die Summe $[\lambda\,\lambda]$ in Bezug auf x, y, z ein Minimum wird; denn es ist

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial\,[\lambda\,\lambda]}{\partial\,x} = \left[\lambda\,\frac{\partial\,\lambda}{\partial\,x}\right] = [a\,\lambda], \qquad \text{u. s. w.}$$

Die Systeme der Gleichungen 7), 8) und 9) sind also untereinander gleich.

Die Anzahl der Normalgleichungen beträgt drei und es kommen unter jedem Summenzeichen [ ] die bezüglichen Werte aus sämtlichen n Beobachtungen vor, so daß die erforderliche Anzahl von Gleichungen zur Berechnung der Unbekannten aufgestellt ist und zugleich alle Beobachtungen berücksichtigt erscheinen.

Die Normalgleichungen könnten nach einer der bekannten Auflösungsmethoden für lineare Gleichungen aufgelöst werden, womit

man zur Kenntnis der Werte x, y, z gelangt; setzt man sodann diese Werte in die Fehlergleichungen ein, so ergeben sich auch die λ. Hiemit ist jedoch die Aufgabe keineswegs als gelöst zu betrachten, denn eine vollständige Lösung muß auch die Genauigkeitsbestimmung der Unbekannten enthalten.

3. Genauigkeitsbestimmung.

a) Aufstellung der Gewichtsgleichungen.

Zur Beurteilung der Güte der berechneten Werte der Unbekannten ist die Bestimmung der mittleren Fehler und der Gewichte der Unbekannten erforderlich.

Um diese Aufgabe zu lösen, muß man auf das System der Normalgleichungen ein besonderes Auflösungsverfahren anwenden.

Zu diesem Zwecke multipliziert man, wenn zunächst die Unbekannte x bestimmt werden soll, die Normalgleichungen der Reihe nach mit den vorläufig noch unbestimmten Multiplikatoren Q_{11}, Q_{12}, Q_{13} und addiert dieselben dann; hiebei bekommen die Unbekannten x, y, z gewisse Koeffizienten. Man kann nun die drei Multiplikatoren drei solchen Bedingungen unterwerfen, daß die neue Gleichung in einer für die Auflösung zweckmäßigen Form erscheint. Dies wird im vorliegenden Falle erreicht, wenn man

den Koeffizienten von x gleich 1,
„ „ „ y „ 0,
„ „ „ z „ 0 setzt; hiedurch erhält man:

$$10)\quad \left\{ \begin{array}{ll} [a\,a]\,Q_{11} + [a\,b]\,Q_{12} + [a\,c]\,Q_{13} = 1 & \text{(Koeffizient von } x\text{)}, \\ [a\,b]\,Q_{11} + [b\,b]\,Q_{12} + [b\,c]\,Q_{13} = 0 & \text{(Koeffizient von } y\text{)}, \\ [a\,c]\,Q_{11} + [b\,c]\,Q_{12} + [c\,c]\,Q_{13} = 0 & \text{(Koeffizient von } z\text{)}, \end{array} \right.$$

somit

$$11)\qquad x = [a\,l]\,Q_{11} + [b\,l]\,Q_{12} + [c\,l]\,Q_{13}.$$

Ein analoges Verfahren kann man anwenden, um die Unbekannten y und z zu finden. Für die Unbekannte y wendet man die Multiplikatoren Q_{21}, Q_{22}, Q_{23} an und erhält:

$$12)\quad \left\{ \begin{array}{ll} [a\,a]\,Q_{21} + [a\,b]\,Q_{22} + [a\,c]\,Q_{23} = 0 & \text{(Koeffizient von } x\text{)}, \\ [a\,b]\,Q_{21} + [b\,b]\,Q_{22} + [b\,c]\,Q_{23} = 1 & \text{(Koeffizient von } y\text{)}, \\ [a\,c]\,Q_{21} + [b\,c]\,Q_{22} + [c\,c]\,Q_{23} = 0 & \text{(Koeffizient von } z\text{)}, \end{array} \right.$$

$$13)\qquad y = [a\,l]\,Q_{21} + [b\,l]\,Q_{22} + [c\,l]\,Q_{23}.$$

Zur Bestimmung der Unbekannten z wendet man die Multiplikatoren Q_{31}, Q_{32}, Q_{33} an und erhält

$$14)\quad \begin{cases} [a\,a]\,Q_{31} + [a\,b]\,Q_{32} + [a\,c]\,Q_{33} = 0 \text{ (Koeffizient von } x\text{)}, \\ [a\,b]\,Q_{31} + [b\,b]\,Q_{32} + [b\,c]\,Q_{33} = 0 \text{ (Koeffizient von } y\text{)}, \\ [a\,c]\,Q_{31} + [b\,c]\,Q_{32} + [c\,c]\,Q_{33} = 1 \text{ (Koeffizient von } z\text{)}, \end{cases}$$

$$15)\qquad z = [a\,l]\,Q_{31} + [b\,l]\,Q_{32} + [c\,l]\,Q_{33}.$$

Durch diese Operation wurden $3^2 = 9$ Koeffizienten Q_{ik} eingeführt, welche durch Auflösung der drei Gleichungssysteme 10), 12), 14) ermittelt werden können; nach Einsetzen der berechneten Werte in 11), 13), 15) erhält man x, y, z als lineare Funktion von $l_1, l_2, \ldots\ldots, l_n$ dargestellt.

Die Gleichungen 10), 12) und 14) heißen **Gewichtsgleichungen**, weil sie, wie später gezeigt werden wird, zur Gewichtsbestimmung der Unbekannten geeignet sind.

Werden die Summen in 11), 13) und 15) entwickelt und nach l_1, l_2, ……, l_n geordnet, so folgt mittels der abkürzenden Bezeichnungen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$; $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_n$; $\gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots, \gamma_n$:

$$16)\quad \begin{cases} x = \alpha_1\,l_1 + \alpha_2\,l_2 + \cdots\cdots + \alpha_n\,l_n, \\ \alpha_1 = a_1\,Q_{11} + b_1\,Q_{12} + c_1\,Q_{13}, \\ \alpha_2 = a_2\,Q_{11} + b_2\,Q_{12} + c_2\,Q_{13}, \\ \vdots \\ \alpha_n = a_n\,Q_{11} + b_n\,Q_{12} + c_n\,Q_{13}; \end{cases}$$

$$17)\quad \begin{cases} y = \beta_1\,l_1 + \beta_2\,l_2 + \cdots\cdots + \beta_n\,l_n, \\ \beta_1 = a_1\,Q_{21} + b_1\,Q_{22} + c_2\,Q_{23}, \\ \beta_2 = a_2\,Q_{21} + b_2\,Q_{22} + c_2\,Q_{23}, \\ \vdots \\ \beta_n = a_n\,Q_{21} + b_n\,Q_{22} + c_n\,Q_{23}; \end{cases}$$

$$18)\quad \begin{cases} z = \gamma_1\,l_1 + \gamma_2\,l_2 + \cdots\cdots + \gamma_n\,l_n, \\ \gamma_1 = a_1\,Q_{31} + b_1\,Q_{32} + c_1\,Q_{33}, \\ \gamma_2 = a_2\,Q_{31} + b_2\,Q_{32} + c_2\,Q_{33}, \\ \vdots \\ \gamma_n = a_n\,Q_{31} + b_n\,Q_{32} + c_n\,Q_{33}. \end{cases}$$

b) **Mittlere Fehler der Unbekannten.**

Wenn eine Größe als lineare Funktion von direkt beobachteten Größen dargestellt ist, so kann man bekanntlich (Punkt 6 des IV. Abschnittes) ihren mittleren Fehler bestimmen, wenn man die mittleren Fehler der beobachteten Größen kennt.

Setzt man die Beobachtungen $l_1, l_2, \ldots\ldots, l_n$ als gleich genau voraus und sei μ der mittlere Fehler einer Beobachtung, so ergibt sich für den mittleren Fehler μ_x der Unbekannten x der Ausdruck:

$$\mu_x = \sqrt{\alpha_1^2 \mu^2 + \alpha_2^2 \mu^2 + \cdots\cdots + \alpha_n^2 \mu^2} = \mu \sqrt{[\alpha\alpha]};$$

ebenso findet man:

$$\mu_y = \mu \sqrt{[\beta\beta]}$$
$$\mu_z = \mu \sqrt{[\gamma\gamma]}.$$

Man hat also das Gleichungssystem:

$$19) \quad \begin{cases} \mu_x = \mu \sqrt{[\alpha\alpha]}, \\ \mu_y = \mu \sqrt{[\beta\beta]}, \\ \mu_z = \mu \sqrt{[\gamma\gamma]}. \end{cases}$$

Vorläufig scheint es, als ob man zur Bestimmung der mittleren Fehler der Unbekannten die einzelnen α_i, β_i und γ_i nach den Gleichungen 16), 17) und 18) rechnen müßte, was eine sehr beschwerliche Arbeit wäre. Angenommen, die Zahl der Beobachtungen wäre n und die Zahl der Unbekannten u, so müßte man nu Größen rechnen. Dies ist aber nicht nötig; man kann beispielsweise $[\alpha\alpha]$ bestimmen, ohne die einzelnen α_i zu kennen. Um dies zu beweisen, multipliziere man die Gleichungen für $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$ der Reihe nach

zuerst mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$,
dann mit $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$,
ferner mit $b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n$,
endlich mit $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$,

und addiere sie jedesmal, so erhält man

$$[\alpha\alpha] = [a\alpha]\, Q_{11} + [b\alpha]\, Q_{12} + [c\alpha]\, Q_{13},$$
$$[a\alpha] = [aa]\, Q_{11} + [ab]\, Q_{12} + [ac]\, Q_{13},$$
$$[b\alpha] = [ab]\, Q_{11} + [bb]\, Q_{12} + [bc]\, Q_{13},$$
$$[c\alpha] = [ac]\, Q_{11} + [bc]\, Q_{12} + [cc]\, Q_{13}.$$

Vergleicht man die drei letzten Gleichungen dieser Gruppe mit den Gleichungen 10), so findet man:

$$[a\alpha] = 1, \qquad [b\alpha] = 0, \qquad [c\alpha] = 0;$$

mit diesen Werten geht die erste der vier Gleichungen über in $[\alpha\alpha] = Q_{11}$. Auf ähnliche Weise findet man mit den Gleichungen für β und γ:

$$[b\beta] = 1, \qquad [a\beta] = [c\beta] = 0;$$
$$[c\gamma] = 1, \qquad [a\gamma] = [b\gamma] = 0;$$

hiemit folgt für die Quadratsumme $[\beta\beta] = Q_{22}$ und für $[\gamma\gamma] = Q_{33}$.

Man hat also:

20) $$\begin{cases} [\alpha\alpha] = Q_{11}, \\ [\beta\beta] = Q_{22}, \\ [\gamma\gamma] = Q_{33}; \end{cases}$$

mit diesen Ergebnissen resultieren für die mittleren Fehler der Unbekannten die Formeln:

21) $$\begin{cases} \mu_x = \mu\sqrt{Q_{11}}, \\ \mu_y = \mu\sqrt{Q_{22}}, \\ \mu_z = \mu\sqrt{Q_{33}}. \end{cases}$$

Die Größen Q_{11}, Q_{22}, Q_{33} werden aus den Gleichungssystemen 10), 12), 14) bestimmt. Wie μ, der mittlere Fehler einer Beobachtung, gefunden wird, soll später, unter *d)*, gezeigt werden.

Die Kenntnis von μ_x, μ_y, μ_z ist zur Beurteilung der Güte der Werte der Unbekannten von Wichtigkeit.

c) Gewichte der Unbekannten.

Wenn eine Beobachtung den mittleren Fehler μ_0 und das Gewicht eins hat, eine andere den mittleren Fehler μ' und das Gewicht p' besitzt, so besteht bekanntlich folgende Beziehung:

$$p' = \frac{\mu_0^2}{\mu'^2}.$$

Im vorliegenden Falle liegen die gleich genauen Beobachtungen $l_1, l_2, \ldots\ldots, l_n$, jede mit dem mittleren Fehler μ, vor. Schreibt man jeder dieser Beobachtungen das Gewicht eins zu, so ergibt sich für das Gewicht p_x der Bestimmung der Unbekannten x, welcher der mittlere Fehler μ_x zukommt, der Wert

$$p_x = \frac{\mu^2}{\mu_x^2}.$$

Setzt man hierin für μ_x den Wert aus 21) ein, so folgt:

$$p_x = \frac{\mu^2}{\mu^2 Q_{11}} = \frac{1}{Q_{11}}.$$

Auf ähnliche Art findet man:

$$p_y = \frac{1}{Q_{22}},$$

$$p_z = \frac{1}{Q_{33}}.$$

Für die Gewichte der Unbekannten resultieren also die Werte:

$$22)\qquad \left\{\begin{aligned} p_x &= \frac{1}{Q_{11}}, \\ p_y &= \frac{1}{Q_{22}}, \\ p_z &= \frac{1}{Q_{33}}. \end{aligned}\right.$$

Die Kenntnis derselben ist für die Beurteilung der Güte der für die Unbekannten ermittelten Werte ebenso von Wichtigkeit wie die Kenntnis der mittleren Fehler der Unbekannten.

Nach den Gleichungen 20) sind die Summen $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$, $[\gamma\gamma]$ gleichbedeutend mit den Größen Q_{11}, Q_{22}, Q_{33}, zu deren Bestimmung die Gleichungssysteme 10), 12), 14) dienen. Diese Gleichungssysteme werden deshalb als die Gewichtsgleichungen bezeichnet, und zwar bilden 10) die Gewichtsgleichungen für die Unbekannte x, weil sie Q_{11} enthalten; 12) die Gewichtsgleichungen für die Unbekannte y, weil sie Q_{22} enthalten; endlich 14) die Gewichtsgleichungen für die Unbekannte z, weil sie Q_{33} enthalten.

Die Koeffizienten Q_{11}, Q_{22} und Q_{33} führen den Namen Gewichtskoeffizienten.

Man bemerkt, daß die Gewichtsgleichungen mit den Normalgleichungen 8) übereinstimmend gebaut sind und nur in den rechten Seiten sich von diesen und voneinander unterscheiden.

Die Gleichungen 22) lassen ersehen, daß die Multiplikatoren Q mit quadratischen Indizes die reziproken Gewichte der Unbekannten sind, das Gewicht einer Beobachtung gleich eins gesetzt.

d) Bestimmung des mittleren Fehlers einer Beobachtung aus den scheinbaren Fehlern.

Sobald diese Aufgabe erledigt und auch die Gewichte der Unbekannten berechnet sind, können nach den bisherigen Ausführungen auch die mittleren Fehler der letzteren bestimmt werden.

Zur Lösung der in der Überschrift bezeichneten Aufgabe sei das nachstehende Verfahren benützt.



Man hat n Beobachtungen $l_1, l_2, \ldots\ldots, l_n$, welche als gleich genau vorausgesetzt werden. Wüßte man die wahren Verbesserungen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_n$, so könnte man den mittleren Fehler rechnen aus

$$23)\qquad \mu = \sqrt{\frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n}}.$$

Da jedoch die wahren Verbesserungen stets unbekannt bleiben, ist μ mittels dieser Formel nicht bestimmbar. Man wird daher auf bekannte Verbesserungen übergehen; das sind die scheinbaren Verbesserungen λ_i. Es wird sich also darum handeln, die Größe μ mit Hilfe der allein zugänglichen scheinbaren Verbesserungen λ zu berechnen.

Die wahren Verbesserungen geben Anlaß zu den Gleichungen

$$24)\qquad \begin{cases} \varepsilon_1 = -l_1 + a_1 X + b_1 Y + c_1 Z, \\ \varepsilon_2 = -l_2 + a_2 X + b_2 Y + c_2 Z, \\ \vdots \\ \varepsilon_n = -l_n + a_n X + b_n Y + c_n Z; \end{cases}$$

die scheinbaren Fehler hingegen geben Anlaß zu den Gleichungen (sogenannten Fehlergleichungen)

$$25)\qquad \begin{cases} \lambda_1 = -l_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ \lambda_2 = -l_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z. \\ \vdots \\ \lambda_n = -l_n + a_n x + b_n y + c_n z. \end{cases}$$

Man muß darauf hinarbeiten, die Größen $[\lambda\,\lambda]$ und $[\varepsilon\,\varepsilon]$ in Beziehung zu bringen.

Um $[\lambda\,\lambda]$ zu erhalten, multipliziere man die Gleichungen 25) der Reihe nach mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n$ und addiere sie dann; hiedurch erhält man:

$$[\lambda\,\lambda] = -[l\,\lambda] + [a\,\lambda]\,x + [b\,\lambda]\,y + [c\,\lambda]\,z,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$9)\qquad [a\,\lambda] = 0, \quad [b\,\lambda] = 0, \quad [c\,\lambda] = 0$$

$$26)\qquad [\lambda\,\lambda] = -[l\,\lambda].$$

Um $[\varepsilon\,\varepsilon]$ zu finden, multipliziere man die Gleichungen 24) der Reihe nach mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_n$ und addiere sie dann; hiedurch ergibt sich:

$$27)\qquad [\varepsilon\,\varepsilon] = -[l\,\varepsilon] + [a\,\varepsilon]\,X + [b\,\varepsilon]\,Y + [c\,\varepsilon]\,Z.$$

Nun multipliziere man die Gleichungen 25) der Reihe nach mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_n$ und addiere sie dann; auf diese Weise findet man:

28) $$[\lambda \varepsilon] = -[l \varepsilon] + [a \varepsilon]\, x + [b \varepsilon]\, y + [c \varepsilon]\, z.$$

Ferner multipliziere man die Gleichungen 24) der Reihe nach mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n$ und addiere sie dann; hiedurch resultiert:

$$[\lambda \varepsilon] = -[l \lambda] + [a \lambda]\, X + [b \lambda]\, Y + [c \lambda]\, Z,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen

9) $$[a \lambda] = 0, \quad [b \lambda] = 0, \quad [c \lambda] = 0$$

$$[\lambda \varepsilon] = -[l \lambda].$$

Wegen dieser Relation kann man die Formel 26) auch schreiben

$$[\lambda \lambda] = [\lambda \varepsilon]$$

und hiemit erhält man aus 28)

29) $$[\lambda \lambda] = -[l \varepsilon] + [a \varepsilon]\, x + [b \varepsilon]\, y + [c \varepsilon]\, z.$$

Für die Summe der Quadrate der wahren Fehler, vermindert um die Summe der Quadrate der scheinbaren Fehler, erhält man schließlich aus den Gleichungen 27) und 29):

30) $$[\varepsilon \varepsilon] - [\lambda \lambda] = [a \varepsilon](X - x) + [b \varepsilon](Y - y) + [c \varepsilon](Z - z);$$

hierin ist

$$x = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \cdots\cdots + \alpha_n l_n = [\alpha l],$$
$$y = \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \cdots\cdots + \beta_n l_n = [\beta l],$$
$$z = \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \cdots\cdots + \gamma_n l_n = [\gamma l];$$
$$X = \alpha_1 (l_1 + \varepsilon_1) + \alpha_2 (l_2 + \varepsilon_2) + \cdots\cdots + \alpha_n (l_n + \varepsilon_n) = [\alpha l] + [\alpha \varepsilon].$$
$$Y = \beta_1 (l_1 + \varepsilon_1) + \beta_2 (l_2 + \varepsilon_2) + \cdots\cdots + \beta_n (l_n + \varepsilon_n) = [\beta l] + [\beta \varepsilon],$$
$$Z = \gamma_1 (l_1 + \varepsilon_1) + \gamma_2 (l_2 + \varepsilon_2) + \cdots\cdots + \gamma_n (l_n + \varepsilon_n) = [\gamma l] + [\gamma \varepsilon].$$

Die Gleichung für X ergibt sich wie folgt: multipliziert man die Gleichungen 24) der Reihe nach mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$ und addiert dieselben dann, so erhält man mit Rücksicht auf die bereits bekannten Bedingungsgleichungen $[a\, \alpha] = 1$, $[b\, \alpha] = 0$, $[c\, \alpha] = 0$ die Beziehung $[\alpha \varepsilon] = -[\alpha l] + X$, oder $X = [\alpha l] + [a \varepsilon]$. Analog findet man die Gleichungen für Y und Z. Aus den für X, Y, Z; x, y, z aufgestellten Gleichungen folgt nun durch Subtraktion:

$$X - x = [\alpha \varepsilon],$$
$$Y - y = [\beta \varepsilon],$$
$$Z - z = [\gamma \varepsilon],$$



daher hat man:

$$[\varepsilon\,\varepsilon] - [\lambda\,\lambda] = [a\,\varepsilon]\,[\alpha\,\varepsilon] + [b\,\varepsilon]\,[\beta\,\varepsilon] + [c\,\varepsilon]\,[\gamma\,\varepsilon].$$

Nach Auflösung der Summen im rechten Teile ist:

$$\begin{aligned}[\varepsilon\,\varepsilon] - [\lambda\,\lambda] = {} & \varepsilon_1^2\,(a_1\,\alpha_1 + b_1\,\beta_1 + c_1\,\gamma_1) + \\ & + \varepsilon_2^2\,(a_2\,\alpha_2 + b_2\,\beta_2 + c_2\,\gamma_2) + \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & + \varepsilon_n^2\,(a_n\,\alpha_n + b_n\,\beta_n + c_n\,\gamma_n) + \\ & + \varepsilon_1\,\varepsilon_2\,(a_1\,\alpha_2 + a_2\,\alpha_1 + b_1\,\beta_2 + b_2\,\beta_1 + c_1\,\gamma_2 + c_2\,\gamma_1) + \\ & + \varepsilon_1\,\varepsilon_3\,(a_1\,\alpha_3 + a_3\,\alpha_1 + b_1\,\beta_3 + b_3\,\beta_1 + c_1\,\gamma_3 + c_3\,\gamma_1) + \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & + \varepsilon_{n-1}\,\varepsilon_n\,(a_{n-1}\,\alpha_n + a_n\,\alpha_{n-1} + b_{n-1}\,\beta_n + b_n\,\beta_{n-1} + c_{n-1}\,\gamma_n + \\ & \qquad + c_n\,\gamma_{n-1}).\end{aligned}$$

Man ersetze nun auf der rechten Seite jedes Glied durch seinen Mittelwert und betrachte den so erhaltenen Wert des rechtsseitigen Ausdruckes als gleichwertig mit $[\varepsilon\,\varepsilon] - [\lambda\,\lambda]$. Dabei ist zu beachten, daß der Mittelwert eines jeden ε_i^2 gleich ist μ^2, und der Mittelwert eines jeden $\varepsilon_i\,\varepsilon_k$ gleich Null, weil vorausgesetzt wurde, daß die Fehler um die Null symmetrisch angeordnet oder frei von einem konstanten Anteil sind. Demnach ergibt dieser Vorgang den Ansatz:

$$\begin{aligned}[\varepsilon\,\varepsilon] - [\lambda\,\lambda] = {} & \mu^2\,(a_1\,\alpha_1 + b_1\,\beta_1 + c_1\,\gamma_1) + \\ & + \mu^2\,(a_2\,\alpha_2 + b_2\,\beta_2 + c_2\,\gamma_2) + \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & + \mu^2\,(a_n\,\alpha_n + b_n\,\beta_n + c_n\,\gamma_n = \\ & = \mu^2\,\{[a\,\alpha] + [b\,\beta] + [c\,\gamma]\},\end{aligned}$$

und da

$$[a\,\alpha] = 1, \quad [b\,\beta] = 1, \quad [c\,\gamma] = 1 \quad \text{ist,}$$

$$[\varepsilon\,\varepsilon] - [\lambda\,\lambda] = 3\,\mu^2.$$

Setzt man im linken Teil $[\varepsilon\,\varepsilon] = n\,\mu^2$, so erhält man schließlich

$$[\lambda\,\lambda] = (n - 3)\,\mu^2$$

und daraus

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\,\lambda]}{n-3}}.$$

Diese Formel kam unter der Voraussetzung zustande, daß drei Unbekannte zu bestimmen seien; allgemein ist demnach für u Unbekannte:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\,\lambda]}{n-u}}.$$

Durch Multiplikation des mittleren Fehlers μ mit 0·67449 ergibt sich alsdann der wahrscheinliche Fehler.

Diese Formel ist nur eine Näherungsformel, welche aber um so strenger sein muß, je größer $n-u$, die Anzahl überschüssiger Beobachtungen, ist. Man bemerke auch, daß μ sich gerade so berechnet, als wären $n-u$ wahre Fehler mit der Quadratsumme $[\lambda\lambda]$ gegeben.

Ist die Anzahl der überschüssigen Beobachtungen gleich Null, so ist es nicht möglich, den mittleren Beobachtungsfehler aus der Ausgleichung zu berechnen. Zur Berechnung der Unbekannten müssen sodann die λ als Null angenommen werden und damit gibt die Formel für μ den Wert $\frac{0}{0}$, d. h. μ ist auf diesem Wege nicht bestimmbar.

4. Beweis, daß jedes $Q_{ih} = Q_{hi}$ ist.

Für die Hilfsgrößen Q wurden die Gleichungssysteme gefunden:

10) $$\left\{\begin{array}{l} [a\,a]\,Q_{11} + [a\,b]\,Q_{12} + [a\,c]\,Q_{13} = 1, \\ [a\,b]\,Q_{11} + [b\,b]\,Q_{12} + [b\,c]\,Q_{13} = 0, \\ [a\,c]\,Q_{11} + [b\,c]\,Q_{12} + [c\,c]\,Q_{13} = 0; \end{array}\right.$$

12) $$\left\{\begin{array}{l} [a\,a]\,Q_{21} + [a\,b]\,Q_{22} + [a\,c]\,Q_{23} = 0, \\ [a\,b]\,Q_{21} + [b\,b]\,Q_{22} + [b\,c]\,Q_{23} = 1, \\ [a\,c]\,Q_{21} + [b\,c]\,Q_{22} + [c\,c]\,Q_{23} = 0; \end{array}\right.$$

14) $$\left\{\begin{array}{l} [a\,a]\,Q_{31} + [a\,b]\,Q_{32} + [a\,c]\,Q_{33} = 0, \\ [a\,b]\,Q_{31} + [b\,b]\,Q_{32} + [b\,c]\,Q_{33} = 0, \\ [a\,c]\,Q_{31} + [b\,c]\,Q_{32} + [c\,c]\,Q_{33} = 1. \end{array}\right.$$

Die Gesamtzahl aller Hilfsgrößen würde $3^2 = 9$ (allgemein u^2, wenn u die Zahl der Unbekannten bezeichnet) sein; sie sind aber nicht sämtlich voneinander verschieden, sondern es ist jedes $Q_{ih} = Q_{hi}$, also z. B. $Q_{12} = Q_{21}$. Es genügt, wenn die Richtigkeit der letzten Beziehung erwiesen wird. Multipliziert man die Gleichungen 10) der Reihe nach mit Q_{21}, Q_{22}, Q_{23} und addiert sodann, so entsteht:

$$\begin{aligned} &([a\,a]\,Q_{11} + [a\,b]\,Q_{12} + [a\,c]\,Q_{13})\,Q_{21} + \\ &+ ([a\,b]\,Q_{11} + [b\,b]\,Q_{12} + [b\,c]\,Q_{13})\,Q_{22} + \\ &+ ([a\,c]\,Q_{11} + [b\,c]\,Q_{12} + [c\,c]\,Q_{13})\,Q_{23} = Q_{21}; \end{aligned}$$

oder der linke Teil anders gruppiert:

$$\begin{aligned} &([a\,a]\,Q_{21} + [a\,b]\,Q_{22} + [a\,c]\,Q_{23})\,Q_{11} + \\ &+ ([a\,b]\,Q_{21} + [b\,b]\,Q_{22} + [b\,c]\,Q_{23})\,Q_{12} + \\ &+ ([a\,c]\,Q_{21} + [b\,c]\,Q_{22} + [c\,c]\,Q_{23})\,Q_{13} = Q_{21}; \end{aligned}$$

hieraus folgt mit Rücksicht auf das Gleichungssystem 12):

$$Q_{12} = Q_{21}.$$

Es ist also:

$$Q_{12} = Q_{21}, \qquad Q_{13} = Q_{31}, \qquad Q_{23} = Q_{32}.$$

5. Ausdrücke für die Hilfsgrößen Q mit nicht quadratischen Indizes.

Für die Hilfsgrößen Q mit quadratischen Indizes wurde gefunden:

$$Q_{11} = [\alpha\,\alpha], \qquad Q_{22} = [\beta\,\beta], \qquad Q_{33} = [\gamma\,\gamma].$$

Die Hilfsgrößen Q mit nicht quadratischen Indizes stehen zu den Größen α, β, γ auch in einer einfachen Beziehung, welche nun entwickelt werden soll. Vorausgesetzt werden drei Unbekannte und vier Beobachtungen. Es ist dann:

$$16^*)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= a_1\,Q_{11} + b_1\,Q_{12} + c_1\,Q_{13},\\ \alpha_2 &= a_2\,Q_{11} + b_2\,Q_{12} + c_2\,Q_{13},\\ \alpha_3 &= a_3\,Q_{11} + b_3\,Q_{12} + c_3\,Q_{13},\\ \alpha_4 &= a_4\,Q_{11} + b_4\,Q_{12} + c_3\,Q_{13};\end{aligned}\right.$$

$$17^*)\quad \left\{\begin{aligned} \beta_1 &= a_1\,Q_{21} + b_1\,Q_{22} + c_1\,Q_{23},\\ \beta_2 &= a_2\,Q_{21} + b_2\,Q_{22} + c_2\,Q_{23},\\ \beta_3 &= a_3\,Q_{21} + b_3\,Q_{22} + c_3\,Q_{23},\\ \beta_4 &= a_4\,Q_{21} + b_4\,Q_{22} + c_4\,Q_{23};\end{aligned}\right.$$

$$18^*)\quad \left\{\begin{aligned} \gamma_1 &= a_1\,Q_{31} + b_1\,Q_{32} + c_1\,Q_{33},\\ \gamma_2 &= a_2\,Q_{31} + b_2\,Q_{32} + c_2\,Q_{33},\\ \gamma_3 &= a_3\,Q_{31} + b_3\,Q_{32} + c_3\,Q_{33},\\ \gamma_4 &= a_4\,Q_{31} + b_4\,Q_{32} + c_4\,Q_{33}.\end{aligned}\right.$$

Multipliziert man in 16*) jede Gleichung für eines der α mit demjenigen β, welchem derselbe untere Index anhaftet, so ergibt sich alsdann durch Addition:

$$[\alpha\,\beta] = [a\,\beta]\,Q_{11} + [b\,\beta]\,Q_{12} + [c\,\beta]\,Q_{13},$$

weil aber $[a\,\beta] = 0$, $[b\,\beta] = 1$, $[c\,\beta] = 0$, so ist:

$$[\alpha\,\beta] = Q_{12}.$$

In derselben Weise findet man:

$$[\alpha\,\gamma] = Q_{13}, \qquad [\beta\,\gamma] = Q_{23}$$

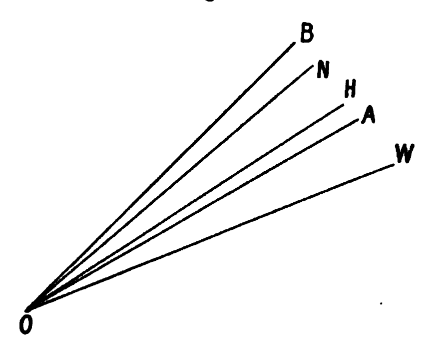
und es ist unschwer zu erkennen, nach welchem Gesetze diese Relationen gebildet sind.

6. Beispiel. Stationsausgleichung.

Von einem Standpunkte O (Fig. 8) aus sind zur Festlegung der relativen Lage der fünf Punkte B, N, H, A und W (von Professor Schwerd) folgende Winkel gemessen worden

$$\begin{aligned} BA &= l_1 = 19^0\,25'\,59{\cdot}42'' \\ BW &= l_2 = 34^0\,18'\,43{\cdot}61'' \\ AW &= l_3 = 14^0\,52'\,44{\cdot}33'' \\ HW &= l_4 = 15^0\,34'\,58{\cdot}80'' \\ BH &= l_5 = 18^0\,43'\,45{\cdot}60' \\ NA &= l_6 = 12^0\,26'\,24{\cdot}65'' \\ BN &= l_7 = \;\;6^0\,59'\,34{\cdot}51'' \\ NH &= l_8 = 11^0\,44'\,11{\cdot}60''. \end{aligned}$$

Fig. 8.



Die Figur soll nur die relative Lage der einzelnen Richtungsstrahlen zum Ausdruck bringen, ohne die Winkelwerte auch nur angenähert wiederzugeben.

Die Beobachtungswerte sind nicht widerspruchsfrei, indem beispielsweise die Zahlenwerte für BA und AW zusammen nicht genau den Zahlenwert BW geben. Da zur relativen Bestimmung der fünf Richtungen OB, ON, OH, OA und OW vier Winkel ausreichen, so sind $8 - 4 = 4$ überschüssige Messungen vorhanden, und die Aufgabe ist, solche Werte der acht Winkel zu bestimmen, für welche die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum ist und welche daher die wahrscheinlichsten Werte der Winkelgrößen sind. (Helmerts Ausgleichsrechnung, Leipzig 1872, Seite 31.)

Als Unbekannte werden die Winkel BN, BH, BA und BW gewählt; deren wahrscheinlichsten (plausiblen) Werte seien bezeichnet beziehungsweise durch x, y, z und t; als deren Näherungswerte sind die rohen Beobachtungswerte l_7, l_5, l_1 und l_2 anzusehen. Alle gemessenen Winkel sind teils Beobachtungen von x, y, z, t selbst, teils von Summen und Differenzen derselben, also sogenannte Summenwinkel.

Die plausiblen Werte der acht Winkelgrößen weichen von $l_1, l_2, \ldots\ldots, l_8$ um Größen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_8$ ab; diese müssen den Beobachtungswerten beigefügt werden, um die plausiblen Werte zu erhalten. Für x, y, z und t hat man:

$$x = l_7 + \lambda_7, \qquad y = l_5 + \lambda_5, \qquad z = l_1 + \lambda_1, \qquad t = l_2 + \lambda_2.$$

Drückt man jetzt alle plausiblen Winkelwerte $l_i + \lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots., 8$, durch x, y, z, t aus, so erhält man folgende Fehlergleichungen:

1)

$\lambda_1 =$	-19^0	$25'$	$59\cdot42''$	.	.	$+z$	.
$\lambda_2 =$	-34^0	$18'$	$43\cdot61''$	.	.	.	$+t$
$\lambda_3 =$	-14^0	$52'$	$44\cdot33''$	.	.	$-z$	$+t$
$\lambda_4 =$	-15^0	$34'$	$58\cdot80''$	.	$-y$	.	$+t$
$\lambda_5 =$	-18^0	$43'$	$45\cdot60''$	.	$+y$	.	.
$\lambda_6 =$	-12^0	$26'$	$24\cdot65''$	$-x$	.	$+z$	.
$\lambda_7 =$	$-\ 6^0$	$59'$	$34\cdot51''$	$+x$	.	.	.
$\lambda_8 =$	-11^0	$44'$	$11\cdot60''$	$-x$	$+y$	.	.

Die Verbesserungen λ_7, λ_5, λ_1, λ_2 sollen mit Rücksicht auf die Bezeichnungen der Werte der Unbekannten durch ξ, η, ζ, τ bezeichnet werden, so daß man schreiben kann:

2)
$$\begin{cases} x = \ \ 6^0\,59'\,34\cdot51'' + \xi, \\ y = 18^0\,43'\,45\cdot60'' + \eta, \\ z = 19^0\,25'\,59\cdot42'' + \zeta, \\ t = 34^0\,18'\,43\cdot61'' + \tau. \end{cases}$$

Durch Einführung von 2) in 1) nehmen die Fehlergleichungen die in der folgenden Tabelle ersichtliche Form an.

3)

$\lambda_1 =$	0	$00''$	.	.	$+\zeta$	.
$\lambda_2 =$	0	$00''$	.	.	.	$+\tau$
$\lambda_3 =$	-0	$14''$	.	.	$-\zeta$	$+\tau$
$\lambda_4 =$	-0	$79''$	.	$-\eta$	.	$+\tau$
$\lambda_5 =$	0	$00''$	.	$+\eta$	.	.
$\lambda_6 =$	$+0$	$26''$	$-\xi$	.	$+\zeta$	.
$\lambda_7 =$	0	$00''$	$+\xi$	.	.	.
$\lambda_8 =$	-0	$51''$	$-\xi$	$+\eta$	.	.

Aus diesen Fehlergleichungen, deren Zahl mit der Anzahl der Beobachtungen übereinstimmt, lassen sich die Normalgleichungen bilden, deren Auflösung die vorteilhaftesten Werte für die Verbesserungen ξ, η, ζ, τ liefert.

Die Bildung der Normalgleichungen kommt auf die Berechnung des Summensystems

$$\begin{array}{lllll} [aa], & [ab], & [ac], & [ad], & [al], \\ & [bb], & [bc], & [bd], & [bl], \\ & & [cc], & [cd], & [cl], \\ & & & [dd], & [dl] \end{array}$$

hinaus. Für die erwähnte Bildung wurde die Tabelle auf Seite 140 entworfen. Die erste Vertikalreihe (Kolonne) enthält die Nummer der Fehlergleichung; die folgenden 5 Kolonnen enthalten unter a, b, c, d, l die Koeffizienten der Fehlergleichungen; die weiter folgenden 14 Kolonnen enthalten die Produkte aa, ab, ac, ad, al, bb, bc, bd, bl, cc, cd, cl, dd, dl, die aus den vorangehenden 5 Kolonnen der in derselben Zeile stehenden Zahlen erhalten werden. Die letzte Kolonne enthält die Produkte $\lambda\lambda$, welche nach der später vorzunehmenden Berechnung von λ ausgefüllt wird. Die letzte Zeile enthält in der letzten Kolonne die Summe $[\lambda\lambda]$; die vorangehenden 14 Summen der letzten Zeile sind die Koeffizienten der Normalgleichungen.

Die Normalgleichungen selbst lauten also:

$$\begin{array}{llllll} (a) & 3\xi & -\eta & -\zeta & & = -0{\cdot}25, \\ (b) & -\xi & +3\eta & & -\tau & = -0{\cdot}28, \\ (c) & -\xi & & +3\zeta & -\tau & = -0{\cdot}40, \\ (d) & & -\eta & -\zeta & +3\tau & = 0{\cdot}93; \end{array}$$

aus denselben erhält man ohne Mühe

$$\begin{aligned} \xi &= -0{\cdot}129'', \\ \eta &= -0{\cdot}048'', \\ \zeta &= -0{\cdot}088'', \\ \tau &= +0{\cdot}265''. \end{aligned}$$

Eliminiert man nämlich aus (b) und (c) ξ und τ mit Hilfe von (a) und (d), so resultiert

$$\begin{aligned} 0 &= +0{\cdot}16 + 7\eta - 2\zeta, \\ 0 &= +0{\cdot}52 - 2\eta + 7\zeta, \end{aligned}$$

woraus sich ergibt

$$\zeta = -0{\cdot}088, \qquad \eta = -0{\cdot}048$$

und hiemit ist weiter

$$\xi = -0{\cdot}129, \qquad \tau = +0{\cdot}265.$$

Nr.	a	b	c	d	l	aa	ab	ac	ad	al	bb	bc	bd	bl	cc	cd	cl	dd	dl	$\lambda\lambda$
1	0	0	1	0	0·00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0·007744
2	0	0	0	1	0·00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0·070225
3	0	0	—1	1	0·14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	—1	—0·14	1	0·14	0·045369
4	0	—1	0	1	0·79	0	0	0	0	0	1	0	—1	—0·79	0	0	0	1	0·79	0·227529
5	0	1	0	0	0·00	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0·002304
6	—1	0	1	0	—0·26	1	0	—1	0	0·26	0	0	0	0	1	0	—0·26	0	0	0·090601
7	1	0	0	0	0·00	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0·016641
8	—1	1	0	0	0·51	1	—1	0	0	—0·51	1	0	0	0·51	0	0	0	0	0	0·184041
Σ						3	—1	—1	0	—0·25	3	0	—1	—0·28	8	—1	—0·40	3	0·93	0·6145

Mittels der gefundenen Werte von ξ, η, ζ und τ findet man nach 2) die plausiblen Werte der Unbekannten mit:

$$x = 6^0\,59'\,34{\cdot}381'',$$
$$y = 18^0\,43'\,45{\cdot}552'',$$
$$z = 19^0\,25'\,59{\cdot}332'',$$
$$t = 34^0\,18'\,43{\cdot}875''.$$

Nun berechnet man sich aus 3) die Größen λ, das sind die plausiblen oder scheinbaren Fehler, und findet:

$$\lambda_1 = -\,0{\cdot}088'',$$
$$\lambda_2 = +\,0{\cdot}265'',$$
$$\lambda_3 = +\,0{\cdot}213'',$$
$$\lambda_4 = -\,0{\cdot}477'',$$
$$\lambda_5 = -\,0{\cdot}048'',$$
$$\lambda_6 = +\,0{\cdot}301'',$$
$$\lambda_7 = -\,0{\cdot}129'',$$
$$\lambda_8 = -\,0{\cdot}429''.$$

Die ausgeglichenen Winkel oder die ausgeglichenen Beobachtungswerte lauten alsdann:

$$l_1 + \lambda_1 = BA = 19^0\,25'\,59{\cdot}332'',$$
$$l_2 + \lambda_2 = BW = 34^0\,18'\,43{\cdot}875'',$$
$$l_3 + \lambda_3 = AW = 14^0\,52'\,44{\cdot}543'',$$
$$l_4 + \lambda_4 = HW = 15^0\,34'\,58{\cdot}323'',$$
$$l_5 + \lambda_5 = BH = 18^0\,43'\,45{\cdot}552'',$$
$$l_6 + \lambda_6 = NA = 12^0\,26'\,24{\cdot}951'',$$
$$l_7 + \lambda_7 = BN = 6^0\,59'\,34{\cdot}381'',$$
$$l_8 + \lambda_8 = NH = 11^0\,44'\,11{\cdot}171'';$$

diese widersprechen sich nicht mehr, indem beispielsweise die Zahlenwerte für BA und AW zusammen genau den Zahlenwert BW geben.

Bei der Bildung der Normalgleichungen kann man auch wie folgt vorgehen:

a) Man multipliziere die rechte Seite jeder Fehlergleichung mit dem Koeffizienten von ξ, addiere die Produkte und setze die Summe gleich Null:

$$\begin{array}{rl} & -0{\cdot}26 + \xi \quad . \;-\zeta \;. \\ & 0{\cdot}00 + \xi \quad . \quad . \quad . \\ & +0{\cdot}51 + \xi - \eta \quad . \quad . \\ \hline 0 = & +0{\cdot}25 + 3\,\xi - \eta - \zeta \end{array}$$

b) Man wiederhole dies in Bezug auf die Koeffizienten von η:

$$\begin{array}{rrrrrr} & +0{\cdot}79 & . & +\eta & . & -\tau \\ & 0{\cdot}00 & . & +\eta & . & . \\ & -0{\cdot}51 & -\xi & +\eta & . & . \\ \hline 0= & +0{\cdot}28 & -\xi & +3\eta & . & -\tau \end{array}$$

c) Ebenso für ζ:

$$\begin{array}{rrrrrr} & 0{\cdot}00 & . & . & +\zeta & \\ & +0{\cdot}14 & . & . & +\zeta & -\tau \\ & +0{\cdot}26 & -\xi & . & +\zeta & \\ \hline 0= & +0{\cdot}40 & -\xi & . & +3\zeta & -\tau. \end{array}$$

d) Ebenso für τ:

$$\begin{array}{rrrrrr} & 0{\cdot}00 & . & . & . & +\tau \\ & -0{\cdot}14 & . & . & -\zeta & +\tau \\ & -0{\cdot}79 & . & -\eta & . & +\tau \\ \hline 0= & -0{\cdot}93 & . & -\eta & -\zeta & +3\tau. \end{array}$$

Die gefundenen vier Gleichungen stimmen mit den früher aufgestellten Normalgleichungen überein.

Da $[\lambda\lambda] = 0{\cdot}6445$, so erhält man für den mittleren Fehler einer Beobachtung

$$\mu = \sqrt{\frac{0{\cdot}6445}{8-4}} = 0{\cdot}401''.$$

Nun sollen die Gewichte p_x, p_y, p_z, p_t der Unbekannten x, y, z, t gesucht werden; sie sind gegeben durch die Gleichungen

$$p_x = \frac{1}{Q_{11}}, \qquad p_y = \frac{1}{Q_{22}}, \qquad p_z = \frac{1}{Q_{33}}, \qquad p_t = \frac{1}{Q_{44}}.$$

Es handelt sich also um die Bestimmung von $Q_{11}, Q_{22}, Q_{33}, Q_{44}$. Die Gleichungen zur Bestimmung dieser Größen sind bekanntlich mit den Normalgleichungen übereinstimmend gebaut und unterscheiden sich von diesen nur in den rechten Teilen.

Zur Bestimmung von Q_{11} hat man das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrrrrl} (a) & 3Q_{11} & -\;Q_{12} & -\;Q_{13} & & =1, \\ (b) & -Q_{11} & +3Q_{12} & & -\;Q_{14} & =0, \\ (c) & -Q_{11} & & +3Q_{13} & -\;Q_{14} & =0, \\ (d) & & -\;Q_{12} & -\;Q_{13} & +3Q_{14} & =0. \end{array}$$

Hieraus folgt durch Addition aller vier Gleichungen

$$(e) \qquad Q_{11} + Q_{12} + Q_{13} + Q_{14} = 1.$$

Addiert man (e) zu (a) und zu (d), so findet man:

$$4\,Q_{11} + \quad Q_{14} = 2,$$
$$Q_{11} + 4\,Q_{14} = 1.$$

Eliminiert man aus diesen zwei Gleichungen Q_{14}, so resultiert $15\,Q_{11} = 7$, daraus

$$Q_{11} = \frac{7}{15}.$$

Ebenso leicht findet man

$$Q_{22} = Q_{33} = Q_{44} = \frac{7}{15}.$$

Für die Gewichte der Unbekannten hat man somit:

$$p_x = \frac{1}{Q_{11}} = \frac{15}{7}, \qquad p_y = \frac{1}{Q_{22}} = \frac{15}{7}, \qquad p_z = \frac{1}{Q_{33}} = \frac{15}{7},$$
$$p_t = \frac{1}{Q_{44}} = \frac{15}{7},$$

also ist

$$p_x = p_y = p_z = p_t = \frac{15}{7}.$$

Endlich sollen die mittleren Fehler μ_x, μ_y, μ_z, μ_t der Unbekannten x, y, z, t ermittelt werden. Dieselben sind gegeben durch die Gleichungen

$$\mu_x = \mu\sqrt{Q_{11}}, \qquad \mu_y = \mu\sqrt{Q_{22}}, \qquad \mu_z = \mu\sqrt{Q_{33}}, \qquad \mu_t = \mu\sqrt{Q_{44}},$$

worin μ, Q_{11}, Q_{22}, Q_{33}, Q_{44} bereits bekannt sind.

Es ist somit

$$\mu_x = \mu\sqrt{\frac{7}{15}}.$$

Weil nun $\mu^2 = 0{\cdot}1611$, so ist

$$\mu_x = \sqrt{\frac{0{\cdot}1611 \times 7}{15}} = \sqrt{0{\cdot}0752} = 0{\cdot}274''$$

Ebenso findet man $\mu_y = \mu_z = \mu_t = 0{\cdot}274''$; sonach ist

$$\mu_x = \mu_y = \mu_z = \mu_t = 0{\cdot}274''.$$

7. Vermittelnde Beobachtungen ungleicher Genauigkeit.

Haben die Beobachtungen l ungleiche Genauigkeit, also auch in Bezug auf eine beliebige Gewichtseinheit verschiedene Gewichte p, nämlich

$$
\begin{array}{llll}
l_1 & \text{das Gewicht} & & p_1, \\
l_2 & \text{„} & \text{„} & p_2, \\
\cdots & \cdots & & \cdots \\
l_n & \text{„} & \text{„} & p_n,
\end{array}
$$

so kann man sich denken, daß die Größen

$$l_1 \sqrt{p_1}, \qquad l_2 \sqrt{p_2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad l_n \sqrt{p_n}$$

beobachtet worden sind, denen gleiches Gewicht, nämlich das Gewicht eins zukommt (vergleiche mit Punkt 5 des IV. Abschnittes). Die Fehlergleichungen

$$
1) \quad \left\{
\begin{array}{l}
\lambda_1 = -l_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\
\lambda_2 = -l_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda_n = -l_n + a_n x + b_n y + c_n z
\end{array}
\right.
$$

können durch Multiplikation mit den Quadratwurzeln der respektiven p so umgewandelt werden, daß sie den Beobachtungen vom Gewichte eins entsprechen:

$$
2) \quad \left\{
\begin{array}{l}
\lambda_1 \sqrt{p_1} = -l_1 \sqrt{p_1} + a_1 \sqrt{p_1}\, x + b_1 \sqrt{p_1}\, y + c_1 \sqrt{p_1}\, z, \\
\lambda_2 \sqrt{p_2} = -l_2 \sqrt{p_2} + a_2 \sqrt{p_2}\, x + b_2 \sqrt{p_2}\, y + c_2 \sqrt{p_2}\, z, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda_n \sqrt{p_n} = -l_n \sqrt{p_n} + a_n \sqrt{p_n}\, x + b_n \sqrt{p_n}\, y + c_n \sqrt{p_n}\, z,
\end{array}
\right.
$$

(Reduktion der Fehlergleichungen auf gleiches Gewicht) und nunmehr können alle Formeln angewendet werden, die für die Ausgleichung von Beobachtungen gleicher Genauigkeit gefunden worden sind, nur ist in denselben zu setzen

$$
\begin{array}{lll}
\text{anstatt } \lambda_1 & \ldots\ldots & \lambda_1 \sqrt{p_1}, \\
\text{„} \quad l_1 & \ldots\ldots & l_1 \sqrt{p_1}, \\
\text{„} \quad a_1 & \ldots\ldots & a_1 \sqrt{p_1}, \\
\text{„} \quad b_1 & \ldots\ldots & b_1 \sqrt{p_1}, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}
$$

Die Ausgleichung gibt nun anstatt „$[\lambda \lambda]$ ein Minimum" für die Summe

$$[p \lambda \lambda] \text{ ein Minimum.}$$

Die nun geltenden Normalgleichungen lauten:

$$
3) \quad \left\{
\begin{array}{l}
[p a a] x + [p a b] y + [p a c] z = [p a l], \\
[p b a] x + [p b b] y + [p b c] z = [p b l], \\
[p c a] x + [p c b] y + [p c c] z = [p c l].
\end{array}
\right.
$$

Die Gewichtsgleichungen für x gestalten sich wie folgt:

$$4)\quad \begin{cases} [p\,a\,a]\,Q_{11} + [p\,a\,b]\,Q_{12} + [p\,a\,c]\,Q_{13} = 1, \\ [p\,b\,a]\,Q_{11} + [p\,b\,b]\,Q_{12} + [p\,b\,c]\,Q_{13} = 0, \\ [p\,c\,a]\,Q_{11} + [p\,c\,b]\,Q_{12} + [p\,c\,c]\,Q_{13} = 0; \end{cases}$$

jene für y und z sind ähnlich.

Die bei vermittelnden Beobachtungen gleicher Genauigkeit erhaltenen Gleichungen 9) (Punkt 2 dieses Abschnittes)

$$[a\,\lambda] = 0, \qquad [b\,\lambda] = 0, \qquad [c\,\lambda] = 0,$$

aus denen die Normalgleichungen hervorgegangen sind, lauten für den vorliegenden Fall:

$$5)\qquad [p\,a\,\lambda] = 0, \quad [p\,b\,\lambda] = 0, \quad [p\,c\,\lambda] = 0$$

und stellen die Bedingungen dar, unter welchen die Summe $[p\,\lambda\,\lambda]$ in Bezug auf x, y, z ein Minimum wird. Daraus ergibt sich die Erweiterung des früher auf den Fall gleich genauer Beobachtungen formulierten Prinzips auf den Fall ungleich genauer Beobachtungen. Es sind nämlich dann jene Werte der Unbekannten die vorteilhaftesten, für welche die Summe der mit den Gewichten multiplizierten Quadrate der (scheinbaren) Fehler am kleinsten wird. Für den mittleren Fehler der Gewichtseinheit ergibt sich aus den auf gleiches Gewicht (= 1) reduzierten λ der Ausdruck

$$6)\qquad \mu = \sqrt{\frac{[\lambda\sqrt{p}\,.\,\lambda\sqrt{p}]}{n-u}} = \sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{n-u}},$$

wenn u die Anzahl der Unbekannten ist; denn die Produkte $\lambda\sqrt{p}$ sind die plausiblen Fehler des Fehlergleichungssystems 2) und auf dieses ist die bereits abgeleitete Formel

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-u}}$$

für Beobachtungen gleicher Genauigkeit anwendbar.

Aus μ ergeben sich mittels der Gewichte der Unbekannten deren mittlere Fehler nach den Formeln:

$$7)\qquad \begin{cases} \mu_x = \dfrac{\mu}{\sqrt{p_x}} = \mu\sqrt{Q_{11}}, \\ \mu_y = \dfrac{\mu}{\sqrt{p_y}} = \mu\sqrt{Q_{22}}, \\ \mu_z = \dfrac{\mu}{\sqrt{p_z}} = \mu\sqrt{Q_{33}}. \end{cases}$$

Man hat ferner, wie sofort bewiesen werden soll, für den Durchschnittsfehler einer Beobachtung vom Gewicht eins

8)
$$\vartheta = \frac{[|\lambda \sqrt{p}|]}{\sqrt{n(n-u)}}.$$

Da die Genauigkeit dieser Formeln mit zunehmendem Nenner $n-u$ wächst, so wird man n möglichst groß nehmen, d. h. man wird in dem Falle, wo die in die Ausgleichung eingeführten Beobachtungswerte arithmetische Mittel von Beobachtungswerten sind, auf die letzteren zurückgehen.

Um die Richtigkeit der Formel 8) zu beweisen, muß man zunächst den Ausdruck für den Durchschnittsfehler bei Beobachtungen gleicher Genauigkeit aufsuchen. Hiezu gelangt man wie folgt (vergleiche mit Punkt 3 des IV. Abschnittes):

In Bezug auf die berechneten Werte der Unbekannten, kann man aus den plausiblen Verbesserungen λ in ähnlicher Art wie aus den wahren Verbesserungen ε einen Durchschnittswert ϑ' und einen Mittelwert μ' bilden. Man erhält für den Durchschnittswert der λ

9)
$$\vartheta' = \frac{[|\lambda|]}{n}$$

und für den Mittelwert der λ

10)
$$\mu' = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n}}.$$

Setzt man nun voraus, daß das Gaußsche Gesetz näherungsweise für die scheinbaren Verbesserungen λ ebenso wie für die wahren Verbesserungen ε Gültigkeit besitzt, so wird das Verhältnis $\mu' : \vartheta'$ näherungsweise denselben Wert haben, wie das Verhältnis $\mu : \vartheta$. Damit erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen 9) und 10), ferner mit Rücksicht auf die im Punkte 3 dieses Abschnittes gefundene Gleichung

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-u}}$$

für den Durchschnittsfehler

$$\vartheta = \frac{\mu}{\mu'}\vartheta' = \vartheta' \sqrt{\frac{n}{n-u}} = \frac{[|\lambda|]}{\sqrt{n(n-u)}}$$

Man hat also:

11)
$$\vartheta = \frac{[|\lambda|]}{\sqrt{n(n-u)}};$$

für $n-u=0$ übergeht dieser Wert für ϑ ebenfalls in $\frac{0}{0}$

Setzt man in diese Formel $\lambda\sqrt{p}$ statt λ, so erhält man die Formel 3).

8. Auflösung der Normalgleichungen und der Gewichtsgleichungen nach Gauß.

Bei diesem Verfahren ist es nicht notwendig, den Fall ungleich genauer Beobachtungen von dem gleich genauer zu unterscheiden, weil Normal- und Gewichtsgleichungen in beiden Fällen dieselbe Form haben.

Wenn es sich nur um wenige Unbekannte handelt, und die Koeffizienten der Gleichungen einfache Zahlen sind, dann wird man sich eines der verschiedenen Kombinationsverfahren der Algebra bedienen, um möglichst rasch zum Ziele zu kommen. Sobald aber die Anzahl der Unbekannten einigermaßen erheblich ist und die Koeffizienten komplizierte Zahlen sind, empfiehlt sich jener systematische Vorgang, den Gauß angegeben hat.

Aus der ersten Gleichung des Systems

$$1)\quad \left\{\begin{array}{l} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z = [a\,l], \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z = [b\,l], \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z = [c\,l] \end{array}\right.$$

folgt

$$2)\quad x + \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,y + \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,z = \frac{[a\,l]}{[a\,a]}.$$

Subtrahiert man diese Gleichung, nachdem man sie mit $[a\,b]$, beziehungsweise $[a\,c]$ multipliziert hat, von der zweiten und dritten, so entstehen die Gleichungen:

$$\left\{[b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,b]\right\} y + \left\{[b\,c] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,c]\right\} z = [b\,l] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,l],$$

$$\left\{[b\,c] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,c]\right\} y + \left\{[c\,c] - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,[a\,c]\right\} z = [c\,l] - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,[a\,l],$$

die analog gebaut sind wie das System 1); denn die zur Hauptdiagonale symmetrisch liegenden Koeffizienten der Unbekannten sind wieder gleich und die der Hauptdiagonale selbst Quadratsummen wie dort, daher positiv; so ist beispielsweise

$$[b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,b] = \frac{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]^2}{[a\,a]} = \left(\frac{a_1\,b_2 - a_2\,b_1}{\sqrt{[a\,a]}}\right)^2 + \\ + \left(\frac{a_1\,b_3 - a_3\,b_1}{\sqrt{[a\,a]}}\right)^2 + \left(\frac{a_2\,b_3 - a_3\,b_2}{\sqrt{[a\,a]}}\right)^2 + \cdots\cdots$$

Ferner zeigen die Koeffizienten der Unbekannten und die absoluten Glieder einen einheitlichen Bau, der sich durch das Schema

$$[ik] - \frac{[ai]}{[aa]}[ak]$$

darstellen läßt; führt man dafür das von Gauß eingeführte Symbol

$$[ik.1]$$

ein, wonach also

$$3) \quad \begin{cases} [bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] = [bb.1], \\ [bc] - \frac{[ab]}{[aa]}[ac] = [bc.1], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

ist, so schreibt sich jenes Gleichungspaar wie folgt:

$$4) \quad \begin{cases} [bb.1]y + [bc.1]z = [bl.1], \\ [bc.1]y + [cc.1]z = [cl.1]. \end{cases}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt:

$$5) \quad y + \frac{[bc.1]}{[bb.1]}z = \frac{[bl.1]}{[bb.1]};$$

multipliziert man dies mit $[bc.1]$ und subtrahiert von der zweiten Gleichung, so entsteht

$$\left\{[cc.1] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc.1]\right\}z = [cl.1] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bl.1];$$

Der Koeffizient von z und die rechte Seite sind nach dem Schema

$$[ik.1] - \frac{[bi.1]}{[bb.1]}[bk.1]$$

gebildet; gebraucht man hiefür die Abkürzung

$$[ik.2],$$

wonach also

$$6) \quad \begin{cases} [cc.1] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc.1] = [cc.2], \\ [cl.1] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bl.1] = [cl.2], \end{cases}$$

so schreibt sich die obige Gleichung:

$$7) \quad [cc.2]z = [cl.2].$$

Aus ihr folgt dann:

$$8) \quad z = \frac{[cl.2]}{[cc.2]}.$$

Die Gleichungen 2), 5), 8) sind geeignet, das System 1) der Normalgleichungen zu ersetzen; ihre Vereinigung:

$$9)\quad \begin{cases} x + \frac{[a\,b]}{[a\,a]} y + \frac{[a\,c]}{[a\,a]} z = \frac{[a\,l]}{[a\,a]}, \\ \qquad\quad y + \frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]} z = \frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}, \\ \qquad\qquad\qquad z = \frac{[c\,l\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]} \end{cases}$$

bildet das System der reduzierten Normalgleichungen. Dasselbe gestattet die Berechnung der Unbekannten durch sukzessive Substitution von der letzten zur ersten. Hat man die darin auftretenden Brüche, welche in ihrer Reihenfolge kurz mit

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{B}_1, & \mathfrak{C}_1, & \mathfrak{L}_1, \\ & \mathfrak{C}_2, & \mathfrak{L}_2, \\ & & \mathfrak{L}_3 \end{array}$$

bezeichnet werden mögen, berechnet, so lassen sich mit Hilfe derselben x, y, z explizite darstellen; es ist nämlich

$$10)\quad \begin{cases} x = \begin{vmatrix} \mathfrak{L}_1 & \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{C}_1 \\ \mathfrak{L}_2 & 1 & \mathfrak{C}_2 \\ \mathfrak{L}_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathfrak{L}_1 - \mathfrak{B}_1 \mathfrak{L}_2 + (\mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_2 - \mathfrak{C}_1)\mathfrak{L}_3, \\ y = \begin{vmatrix} \mathfrak{L}_2 & \mathfrak{C}_2 \\ \mathfrak{L}_3 & 1 \end{vmatrix} = \mathfrak{L}_2 - \mathfrak{C}_2 \mathfrak{L}_3, \\ z = \mathfrak{L}_3. \end{cases}$$

Wendet man dasselbe Eliminationsverfahren, das hier auf die Normalgleichungen ausgeübt worden ist, auf die Gewichtsgleichungen von z, d. i. auf

$$11)\quad \begin{cases} [a\,a]\,Q_{31} + [a\,b]\,Q_{32} + [a\,c]\,Q_{33} = 0, \\ [a\,b]\,Q_{31} + [b\,b]\,Q_{32} + [b\,c]\,Q_{33} = 0, \\ [a\,c]\,Q_{31} + [b\,c]\,Q_{32} + [c\,c]\,Q_{33} = 1 \end{cases}$$

an, so ergeben sich in 9) links dieselben Koeffizienten, rechts dagegen andere Werte; es entsteht nämlich 11) aus 1), wenn man außer der Änderung der Bezeichnung für die Unbekannten

$$[a\,l] \text{ durch } 0, \quad [b\,l] \text{ durch } 0, \quad [c\,l] \text{ durch } 1$$

ersetzt; infolgedessen wird

$$[b\,l.1] = [b\,l] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l] \text{ gleich } 0,$$

$$[c\,l.1] = [c\,l] - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}[a\,l] \text{ gleich } 1,$$

$$[c\,l.2] = [c\,l.1] - \frac{[b\,c.1]}{[b\,b.1]}[b\,l.1] \text{ gleich } 1,$$

und das zu 11) gehörige reduzierte System lautet:

$$12)\quad \left\{\begin{aligned} Q_{31} + \frac{[a\,b]}{[a\,a]}Q_{32} + \frac{[a\,c]}{[a\,a]}Q_{33} &= 0, \\ Q_{32} + \frac{[b\,c.1]}{[b\,b.1]}Q_{33} &= 0, \\ Q_{33} &= \frac{1}{[c\,c.2]}. \end{aligned}\right.$$

Am bemerkenswertesten ist die dritte dieser Gleichungen, da sie aussagt, daß bei dem eingeschlagenen Eliminationsverfahren der Nenner des für die letzte Unbekannte ermittelten Wertes zugleich ihr Gewicht angibt.

Auf diese Weise ist aber nur das Gewicht der letzten Unbekannten einfach gefunden. Um das der ersten zu erhalten, könnte man das System der Normalgleichungen derart umstellen, daß die Gleichungen und die Unbekannten in die umgekehrte Ordnung kommen; führt man bei dieser Anordnung das Eliminationsverfahren wie früher durch, so gibt der Nenner von x zugleich dessen Gewicht. Zur Bestimmung des Gewichtes von y wäre nur die Umstellung des abgekürzten Systems 4) erforderlich. Wählt man diesen Vorgang, so gewährt die mehrfache Bestimmung der Unbekannten zugleich eine Kontrolle der Rechnung.

Bei einer größeren Anzahl von Unbekannten wird jedoch eine solche Wiederholung des Eliminationsverfahrens beschwerlich; es empfiehlt sich dann, jedes System von Gewichtsgleichungen ebenso zu reduzieren wie das Normalgleichungssystem. So gehen die Gewichtsgleichungen für x:

$$\begin{aligned} [a\,a]\,Q_{11} + [a\,b]\,Q_{12} + [a\,c]\,Q_{13} &= 1, \\ [a\,b]\,Q_{11} + [b\,b]\,Q_{12} + [b\,c]\,Q_{13} &= 0, \\ [a\,c]\,Q_{11} + [b\,c]\,Q_{12} + [c\,c]\,Q_{13} &= 0 \end{aligned}$$

aus den Normalgleichungen hervor, wenn man

$$[a\,l] \text{ durch } 1, \quad [b\,l] \text{ durch } 0, \quad [c\,l] \text{ durch } 0$$

ersetzt; mithin wird

$$[b\,l.1] = [b\,l] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l] \text{ gleich } -\frac{[a\,b]}{[a\,a]},$$

$$[c\,l.1] = [c\,l] - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}[a\,l] \text{ gleich } -\frac{[a\,c]}{[a\,a]},$$

$$[c\,l.2] = [c\,l.1] - \frac{[b\,c.1]}{[b\,b.1]}[b\,l.1] \text{ gleich } -\frac{[a\,c]}{[a\,a]} + \frac{[a\,b][b\,c.1]}{[a\,a][b\,b.1]}$$

und daher das System der reduzierten Gewichtsgleichungen

$$Q_{11} + \frac{[a\,b]}{[a\,a]}Q_{12} + \frac{[a\,c]}{[a\,a]}Q_{13} = \frac{1}{[a\,a]},$$

$$Q_{12} + \frac{[b\,c.1]}{[b\,b.1]}Q_{13} = -\frac{[a\,b]}{[a\,a][b\,b.1]},$$

$$Q_{13} = -\frac{[a\,c]}{[a\,a][c\,c.2]} + \frac{[a\,b][b\,c.1]}{[a\,a][b\,b.1][c\,c.2]},$$

woraus durch sukzessive Substitution Q_{11}, das reziproke Gewicht von x, bestimmt werden kann.

9. Nichtlineare Relationen zwischen der beobachteten Größe und den unbekannten Größen.

Die Theorie der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen bedarf noch einer wichtigen Ergänzung. Bei den vorhergehenden Untersuchungen ist nämlich angenommen worden, daß zwischen der zu beobachtenden Größe V und den Unbekannten X, Y, Z, ..., eine lineare Beziehung bestehe. Ist hingegen der Zusammenhang ein anderer, so bedarf es einer vorbereitenden Rechnung, bevor an die Ausgleichsrechnung geschritten wird.

Es bestehe allgemein zwischen V und den drei Unbekannten die Beziehung:

1) $$0 = -V + F(X, Y, Z).$$

Die Beobachtung l_i von V, mit dem Fehler $-\varepsilon_i$, führt zur Gleichung

2) $$\varepsilon_i = -l_i + F_i(X, Y, Z);$$

Der Zeiger i bei F deutet auf Parameter hin, welche sich von Beobachtung zu Beobachtung ändern.

Zunächst ist es erforderlich, sich für die Unbekannten möglichst genaue **Näherungswerte** zu verschaffen, welche durch die Ausgleichung nur noch kleine Verbesserungen zu erhalten haben.

Wie man sich diese Näherungswerte verschafft, ist gleichgültig. Wählt man beispielsweise in zweckmäßiger Weise so viel Beobachtungen aus, als es Unbekannte gibt, und betrachtet sie als fehlerfrei,

so ergeben sich Gleichungen in gerade zureichender Zahl zur Bestimmung von Näherungswerten X_0, Y_0, Z_0 der Unbekannten. Von diesen werde angenommen, daß die Verbesserungen ξ, η, ζ, durch welche sie auf die wahren Werte X, Y, Z ergänzt werden, so klein seien, daß man Glieder mit höheren Potenzen und Produkten derselben außer acht lassen könne. Unter solchen Verhältnissen kann

$$F_i(X, Y, Z) = F_i(X_0 + \xi,\ Y_0 + \eta,\ Z_0 + \zeta) = \\ = F_i(X_0, Y_0, Z_0) + \frac{\partial F_i}{\partial X_0}\xi + \frac{\partial F_i}{\partial Y_0}\eta + \frac{\partial F_i}{\partial Z_0}\zeta$$

gesetzt werden, und es geht die Gleichung 2) über in:

$$3)\quad \varepsilon_i = -l_i + F_i(X_0, Y_0, Z_0) + \frac{\partial F_i}{\partial X_0}\xi + \frac{\partial F_i}{\partial Y_0}\eta + \frac{\partial F_i}{\partial Z_0}\zeta.$$

Wenn nun

$$4)\quad \left\{ \begin{array}{l} l_i - F_i(X_0, Y_0, Z_0) = l_i', \\ \dfrac{\partial F_i}{\partial X_0} = a_i, \quad \dfrac{\partial F_i}{\partial Y_0} = b_i, \quad \dfrac{\partial F_i}{\partial Z_0} = c_i \end{array} \right\}$$

gesetzt wird, so nimmt 3) die bei der Stellung der Aufgabe für vermittelnde Beobachtungen (Punkt 1 dieses Abschnittes) vorausgesetzte lineare Form an:

$$5)\quad \varepsilon_i = -l_i' + a_i\xi + b_i\eta + c_i\zeta.$$

Jeder solchen Gleichung entspricht eine andere:

$$6)\quad \lambda_i = -l_i' + a_i x + b_i y + c_i z,$$

in der x, y, z die vorteilhaftesten Werte der Verbesserungen bedeuten, so daß

$$7)\quad X_0 + x, \qquad Y_0 + y, \qquad Z_0 + z$$

die vorteilhaftesten Werte der Unbekannten selbst sind.

Aber erst der Erfolg der Rechnung kann darüber belehren, ob die Voraussetzung zulässig war, auf welcher der Ansatz 3) beruhte. Sollten sich für x, y, z so große Werte ergeben, daß man gegen die Außerachtlassung der Potenzen und Produkte Bedenken tragen muß, dann wäre die ganze Rechnung mit den Werten 7) als neuen Näherungswerten zu wiederholen.

Die Einführung von Näherungswerten für die Unbekannten empfiehlt sich zumeist auch dann, wenn die Relation zwischen V und $X, Y, Z, \ldots\ldots$ von Natur aus linear ist; sie hat dann aber einen andern Zweck als vorhin, nämlich den der Vereinfachung der numerischen Rechnung (siehe das Beispiel im Punkte 6 dieses Abschnittes). Sind nämlich die Beobachtungsergebnisse l_i vielziffrige Zahlen, so

kann durch passende Näherungswerte bewirkt werden, daß die nach der Vorschrift 4) reduzierten Beobachtungen:

$$l_i' = l_i - F_i(X_0, Y_0, Z_0) = l_i - (a_i X_0 + b_i Y_0 + c_i Z_0)$$

bequemere Zahlen werden.

10. Übersichtliche Zusammenstellung des Rechnungsvorganges.

Die **erste Arbeit** bei der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen ist die **Aufstellung der Fehlergleichungen,** die schließlich immer die Form:

$$1)\qquad \lambda_i = -l_i + a_i x + b_i y + c_i z$$

annehmen. Ihre Anzahl stimmt mit der Anzahl der Beobachtungen überein. Handelt es sich um lineare Beziehungen, so bedarf dies keiner besonderen Rechnung; nur bei Einführung von Näherungswerten X_0, Y_0, Z_0 zum Zwecke der Reduktion der l hat man für jede Gleichung den Wert von

$$a_i X_0 + b_i Y_0 + c_i Z_0$$

zu berechnen, von l_i zu subtrahieren und mit den Differenzen l_i' wieder Gleichungen von der Form 1) zu bilden, in welchen x, y, z nunmehr Korrektionen an den Näherungswerten bedeuten.

Bei nicht linearen Relationen erfordert die Aufstellung der Fehlergleichungen besondere Vorarbeiten, welche bereits im Punkte 9 dieses Abschnittes erörtert wurden.

Die **zweite Arbeit** besteht in der **Bildung der Normalgleichungen,** die auf die Berechnung des Summensystems

$$2)\qquad \left\{\begin{array}{llll} [a\,a], & [a\,b], & [a\,c], & [a\,l] \\ & [b\,b], & [b\,c], & [b\,l] \\ & & [c\,c], & [c\,l] \end{array}\right.$$

hinauskommt und bei zahlreichen Beobachtungen und vielziffrigen Koeffizienten den beschwerlichsten Teil der Arbeit bildet. Zur Erleichterung können Quadrattafeln und Produkttafeln gute Dienste leisten. In Ermangelung der letzteren können die nichtquadratischen Summen wie $[a\,b]$, $[a\,c]$ u. s. w. mit einer leichten Mehrarbeit auch mittels Quadrattafeln berechnet werden, weil

$$[a\,b] = \frac{[(a+b)^2] - [a\,a] - [b\,b]}{2}$$

ist.

Bei Beobachtungen ungleicher Genauigkeit kommt noch die Multiplikation mit den Gewichten hinzu. Das zu berechnende Summensystem lautet hier

$$\begin{array}{cccc} [p\,a\,a], & [p\,a\,b], & [p\,a\,c], & [p\,a\,l], \\ & [p\,b\,b], & [p\,b\,c], & [p\,b\,l], \\ & & [p\,c\,c], & [p\,c\,l], \end{array}$$

ist aber bei den weiteren Rechenprozessen genau so wie 2) zu behandeln, wird daher häufig auch in der Form

$$\begin{array}{cccc} (a\,a), & (a\,b), & (a\,c), & (a\,l), \\ & (b\,b), & (b\,c), & (b\,l), \\ & & (c\,c), & (c\,l) \end{array}$$

geschrieben.

Die **dritte Arbeit** ist die **Auflösung der Normalgleichungen** und damit in Verbindung die **Gewichtsbestimmung.** Die Aufstellung der reduzierten Normalgleichungen, welche hiezu erforderlich ist, bedingt die Bildung der Koeffizienten

$$3)\qquad \left\{\begin{array}{ccc} [b\,b\,.\,1], & [b\,c\,.\,1], & [b\,l\,.\,1], \\ & [c\,c\,.\,2], & [c\,l\,.\,2], \end{array}\right.$$

nach den bei der Auflösung der Normalgleichungen und der Gewichtsgleichungen gegebenen Schematen. Sind diese berechnet, so kann nach Ausführung einiger Divisionen das System:

$$4)\qquad \left\{\begin{array}{l} x + \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,y + \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,z = \frac{[a\,l]}{[a\,a]}, \\ \qquad\qquad y + \frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,z = \frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad z = \frac{[c\,l\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]} \end{array}\right.$$

ziffermäßig hergestellt werden; aus ihm erhält man (durch sukzessive Substitution) x, y, z. Gleichzeitig ist das Gewicht von z bestimmt; über die Ermittlung der Gewichte von y und x wurde das Nötige bei der Auflösung der Gewichtsgleichungen (Punkt 8 dieses Abschnittes) angegeben.

Die **vierte Arbeit** betrifft die **Berechnung der scheinbaren Fehler.** Man erhält sie durch Einsetzung von x, y, z in die Fehlergleichungen.

Die **letzte Arbeit** ist die **Genauigkeitsbestimmung.** Sie erfordert die Berechnung des mittleren Fehlers der einzelnen Beobachtung oder der Gewichtseinheit. Dazu ist die Bildung von $[\lambda\,\lambda]$,

beziehungsweise $[p\lambda\lambda]$ nötig, wozu wieder Quadrat- und eventuell auch Produkttafeln verwendet werden können. Hieraut hat man bei u Unbekannten

5) $$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-u}}, \quad \text{beziehungsweise} \quad \mu = \sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{n-u}}.$$

zu ermitteln.

Daraus berechnen sich mittels der Gewichte p_x, p_y, p_z der Unbekannten deren mittlere Fehler:

6) $$\mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{p_x}}, \quad \mu_y = \frac{\mu}{\sqrt{p_y}}, \quad \mu_z = \frac{\mu}{\sqrt{p_z}}.$$

11. Rechnungskontrollen.

Bei der Ausführung umfangreicher Rechnungen ist die Anwendung von Kontrollen unbedingt erforderlich. Die Theorie gibt deren einige unmittelbar an die Hand. So besteht eine durchgreifende Probe nach Auflösung der Normalgleichungen und Berechnung der λ darin, daß man prüft, ob

1) $$[a\lambda] = 0, \quad [b\lambda] = 0, \quad [c\lambda] = 0$$

(Punkt 2 dieses Abschnittes) sei, wie es die Theorie verlangt. Bei ungleich genauen Beobachtungen treten an Stelle von 1) die Gleichungen

2) $$[pa\lambda] = 0, \quad [pb\lambda] = 0, \quad [pc\lambda] = 0$$

(Punkt 7 dieses Abschnittes).

Eine andere, ebenfalls durchgreifende Kontrolle besteht in einer zweiten Berechnung von $[\lambda\lambda]$,*) die sich wie folgt ergibt. Aus

$$\lambda_i = -l_i + a_i x + b_i y + c_i z$$

folgt, wenn man quadriert und addiert,

$$[\lambda\lambda] = [ll] + \Big\{[aa]x + [ab]y + [ac]z - 2[al]\Big\}x + \\ + \Big\{[ab]x + [bb]y + [bc]z - 2[bl]\Big\}y + \\ + \Big\{[ac]x + [bc]y + [cc]z - 2[cl]\Big\}z,$$

und dies reduziert sich vermöge der Normalgleichungen auf

3) $$[\lambda\lambda] = [ll] - [al]x - [bl]y - [cl]z.$$

*) Die erste Art der Berechnung von $[\lambda\lambda]$ besteht darin, daß man die scheinbaren Verbesserungen λ mit Hilfe der Werte der Unbekannten aus den betreffenden Fehlergleichungen ermittelt, alsdann die λ quadriert und addiert.

Um sich nun von den berechneten Werten der Unbekannten unabhängig zu machen, schreibe man die erste der Gleichungen 4) des Punktes 10 dieses Abschnittes darunter in der Anordnung:

$$0 = -\frac{[a\,l]}{[a\,a]} + x + \frac{[a\,b]}{[a\,a]}y + \frac{[a\,c]}{[a\,a]}z$$

multipliziere sie mit $[a\,l]$ und addiere sie zur vorigen; dadurch entsteht:

$$[\lambda\lambda] = [l\,l] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - [b\,l.1]\,y - [c\,l.1]\,z.$$

Hierunter setze man die zweite der Gleichungen 4) des Punktes 10:

$$0 = -\frac{[b\,l.1]}{[b\,b.1]} + y + \frac{[b\,c.1]}{[b\,b.1]}z,$$

multipliziere sie mit $[b\,l.1]$ und addiere sie zur vorigen; es entsteht:

$$[\lambda\lambda] = [l\,l] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l.1]^2}{[b\,b.1]} - [c\,l.2]\,z.$$

Die letzte der Gleichungen 4) des Punktes 10 nach Multiplikation mit $[c\,l.2]$ dazugefügt, erhält man schließlich:

$$4) \qquad [\lambda\lambda] = [l\,l] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l.1]^2}{[b\,b.1]} - \frac{[c\,l.2]^2}{[c\,c.2]}.$$

Man erkennt, wie sich diese Formel nach Elimination aller Unbekannten für mehr als drei Unbekannte gestalten würde. Es wird z. B. für vier Unbekannte:

$$[\lambda\lambda] = [l\,l] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l.1]^2}{[b\,b.1]} - \frac{[c\,l.2]^2}{[c\,c.2]} - \frac{[d\,l.3]^2}{[d\,d.3]}.$$

Hat man dem Schema 2) des Punktes 10 gleich von Anfang an die Summe $[l\,l]$ angereiht, so erfordert die Durchführung der Rechnung nach der soeben gefundenen Formel 4) nur noch Größen, welche schon wegen der Bildung der reduzierten Normalgleichungen 4) des Punktes 10 notwendig sind. Übrigens ist die rechte Seite der Gleichung 4) dieses Punktes gleichbedeutend mit dem Symbol $[l\,l.3]$ und kann daher auch nach den bei der Auflösung der Normalgleichungen und der Gewichtsgleichungen gegebenen Schematen (Punkt 8 dieses Abschnittes) gebildet werden; denn es ist

$$[l\,l] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} = [l\,l.1]$$

$$[l\,l] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l.1]^2}{[b\,b.1]} = [l\,l.1] - \frac{[b\,l.1]^2}{[b\,b.1]} = [l\,l.2],$$

daher

$$[\lambda\lambda] = [ll.2] - \frac{[cl.2]^2}{[cc.2]} = [ll.3],$$

wenn man das Gesetz der Schemata fortbildet.

Die Kontrolle durch doppelte Berechnung der $[\lambda\lambda]$ ist zwar durchgreifend für die ganze Ausgleichung, aber sie zeigt leider erst am Ende der Rechnung das Vorhandensein eines Fehlers.

Bei großen Ausgleichungsarbeiten führt man eine die ganze Rechnung begleitende Kontrolle durch, auf die hier nicht eingegangen werden soll. Näheres hierüber findet man in dem Werke: Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate von F. R. Helmert, 1872, Seite 104, § 14.

Die Berechnung der Summe $[\lambda\lambda]$ kann auch nach der Formel 3) erfolgen. Die Kontrolle ist hier ebenso vollständig. Um dies wenigstens für einen einfachen Fall zu zeigen, nehme man an, x sei um $\varDelta$ zu groß gefunden worden, dann wird nach der Formel 3) erhalten anstatt $[\lambda\lambda]$ ein Wert $[\lambda\lambda]'$, der um $-[al]\varDelta$ davon verschieden ist:

5) $$[\lambda\lambda]' = [\lambda\lambda] - [al]\varDelta.$$

Dagegen gibt die Substitution des fehlerhaften x in die Fehlergleichungen anstatt der richtigen Werte solche Werte, die um $+a\varDelta$ fehlerhaft sind. Bezeichnet man allgemein einen solchen fehlerhaften Wert mit λ', so hat man $\lambda' = \lambda + a\varDelta$; hiemit wird:

$$[\lambda'\lambda'] = [\lambda\lambda] + [aa]\varDelta^2 + 2\varDelta[a\lambda]$$

oder, da $[a\lambda]$ Null ist,

6) $$[\lambda'\lambda'] = [\lambda\lambda] + [aa]\varDelta^2.$$

Die rechten Seiten der Gleichungen 5) und 6) sind hiernach verschieden, so daß ein Fehler $\varDelta$ erkannt werden kann. Diese Kontrolle würde nur trügerisch sein, wenn zufällig x so angenommen wäre, daß

$$\varDelta = -\frac{[al]}{[aa]}$$

würde.

12. Beispiele.

1. Beispiel. Ausgleichung von Höhenmessungen.

Es sind die Höhenunterschiede (Höhenabstände) folgender Punktepaare gemessen worden:

$$AB = l_1, \quad AC = l_2, \quad AD = l_3,$$
$$BC = l_4, \quad BD = l_5,$$
$$CD = l_6.$$

Zur Festlegung der relativen Höhenlage der vier Punkte A, B, C, D genügen aber drei Höhenunterschiede, somit sind drei Beobachtungen überzählig. Faßt man die drei ersten Höhenunterschiede als die Unbekannten X, Y, Z auf, so ergeben sich folgende Fehlergleichungen:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -l_1 + x \\
\lambda_2 &= -l_2 \qquad + y \\
\lambda_3 &= -l_3 \qquad\qquad + z \\
\lambda_4 &= -l_4 - x + y \\
\lambda_5 &= -l_5 - x \qquad + z \\
\lambda_6 &= -l_6 \qquad - y + z.
\end{aligned}$$

Sind alle Messungsergebnisse als gleich genau zu betrachten, so hat man zur Bestimmung von x, y, z die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
3x - y - z &= l_1 - l_4 - l_5, \\
-x + 3y - z &= l_2 + l_4 - l_6, \\
-x - y + 3z &= l_3 + l_5 + l_6.
\end{aligned}\right\}$$ (Aufstellung nach der im Punkte 6 dieses Abschnittes Seite 141 angegebenen Regel.)

Zu ihrer Lösung bilde man die Summe:

$$x + y + z = l_1 + l_2 + l_3$$

und addiere sie folgeweise zur ersten, zweiten und dritten Gleichung; dadurch erhält man:

$$x = \frac{1}{4}(2\,l_1 + l_2 + l_3 - l_4 - l_5),$$

$$y = \frac{1}{4}(l_1 + 2\,l_2 + l_3 + l_4 - l_6),$$

$$z = \frac{1}{4}(l_1 + l_2 + 2\,l_3 + l_5 + l_6).$$

Für $[\lambda\lambda]$ erhält man nach der Formel

$$[\lambda\lambda] = [l\,l] - [a\,l]\,x - [b\,l]\,y - [c\,l]\,z$$

mit Benützung der rechten Seiten der Normalgleichungen den Ausdruck:

$$[\lambda\lambda] = \frac{1}{2}\left([l\,l] - l_1 l_2 - l_1 l_3 - l_2 l_3 - l_2 l_4 + l_2 l_6 + l_3 l_4 - l_3 l_5 - l_3 l_6 - \right.$$
$$\left. - l_4 l_5 + l_4 l_6 - l_5 l_6\right);$$

die Quadratwurzel aus dem dritten Teile dieses Wertes wäre der mittlere Fehler einer einzelnen Beobachtung. ($n - u = 6 - 3$.)

Die Gewichtsgleichungen für x sind:

$$\begin{aligned} 3\,Q_{11} - Q_{12} - Q_{13} &= 1, \\ -Q_{11} + 3\,Q_{22} - Q_{13} &= 0, \\ -Q_{11} - Q_{12} + 3\,Q_{33} &= 0; \end{aligned}$$

verfährt man mit ihnen wie mit den Normalgleichungen, so ergibt sich:

$$Q_{11} = \frac{1}{2}, \quad \text{ebenso} \quad Q_{22} = \frac{1}{2}, \quad Q_{33} = \frac{1}{2}.$$

Es ist hiernach der mittlere Fehler jeder Unbekannten dem $\sqrt{\frac{1}{2}}$-fachen mittleren Fehler einer Beobachtung gleich.

2. Beispiel. Stationsausgleichung.

Bei dieser handelt es sich um eine ähnliche Aufgabe wie bei der Ausgleichung von Höhenmessungen.

Von einem Punkte L (Fig. 9) aus sind folgende Winkel zwischen den Punkten E, S, A, G gemessen worden:

$$ES = l_1, \qquad EA = l_2, \qquad EG = l_3,$$
$$SA = l_4, \qquad SG = l_5.$$

Fig. 9.

Die nachfolgend angegebenen Ergebnisse sind Mittelwerte aus der daneben angeführten Anzahl einfacher Beobachtungen:

$l_1 = 59^0\,53'\,44{\cdot}03''$,	16
$l_2 = 98^0\,58'\,23{\cdot}41''$,	8
$l_3 = 271^0\,17'\,29{\cdot}38''$,	8
$l_4 = 38^0\,59'\,38{\cdot}97''$,	8
$l_5 = 211^0\,23'\,46{\cdot}38''$,	8.

Da zur relativen Bestimmung der vier Richtungen LE, LS, LA, LG drei Winkel ausreichen, so sind zwei Messungen überschüssig. Wählt man

$$X = ES, \qquad Y = EA, \qquad Z = EG$$

als die Unbekannten, die rohen Beobachtungswerte l_1, l_2, l_3 als deren Näherungswerte, so ergeben sich für die vorteilhaftesten Verbesserungen x, y, z an den Näherungswerten die Fehlergleichungen:

$\lambda_1 =$	x	Gewicht 2
$\lambda_2 =$	y	„ 1
$\lambda_3 =$	z	„ 1
$\lambda_4 =$	$0{\cdot}41 - x + y$	„ 1
$\lambda_5 =$	$-1{\cdot}03 - x + z$	„ 1

0·41 entsteht als Differenz aus $l_2 - l_1$ und l_4, $-1{\cdot}03$ als Differenz aus $l_3 - l_1$ und l_5.

Die Bildung der Normalgleichungen gestaltet sich sehr einfach; es ist nämlich:

$$[paa] = 4, \quad [pab] = -1, \quad [pac] = -1, \quad [pal] = -0{\cdot}62,$$
$$[pbb] = 2, \quad [pbc] = 0, \quad [pbl] = -0{\cdot}41,$$
$$[pcc] = 2, \quad [pcl] = 1{\cdot}03;$$

sie lauten daher

$$4x - y - z = -0{\cdot}62,$$
$$-x + 2y = -0{\cdot}41,$$
$$-x + 2z = 1{\cdot}03$$

und geben ohne Mühe

$$x = -0{\cdot}103'', \qquad y = -0{\cdot}257'', \qquad z = 0{\cdot}464''.$$

Man berechnet hiemit

$$\lambda_1 = -0{\cdot}103,$$
$$\lambda_2 = -0{\cdot}257,$$
$$\lambda_3 = 0{\cdot}464,$$
$$\lambda_4 = 0{\cdot}257,$$
$$\lambda_5 = -0{\cdot}464,$$

und zwischen den ausgeglichenen Winkeln

$$l_1 + \lambda_1 = 59^0\,53'\,43{\cdot}927'',$$
$$l_2 + \lambda_2 = 98^0\,53'\,23{\cdot}153'',$$
$$l_3 + \lambda_3 = 271^0\,17'\,29{\cdot}844'',$$
$$l_4 + \lambda_4 = 38^0\,59'\,39{\cdot}226'',$$
$$l_5 + \lambda_5 = 211^0\,23'\,45{\cdot}917''$$

bestehen keine Widersprüche mehr.

Aus den drei Systemen von Gewichtsgleichungen

$$\left.\begin{array}{rrrl} 4\,Q_{11} & -\;\;Q_{12} & -\;\;Q_{13} & = 1, \\ -\,Q_{11} & +\,2\,Q_{12} & & = 0, \\ -\,Q_{11} & & +\,2\,Q_{13} & = 0, \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rrrl} 4\,Q_{21} & -\;\;Q_{22} & -\;\;Q_{23} & = 0, \\ -\,Q_{21} & +\,2\,Q_{22} & & = 1, \\ -\,Q_{21} & & +\,2\,Q_{23} & = 0, \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rrrl} 4\,Q_{31} & -\;\;Q_{32} & -\;\;Q_{33} & = 0, \\ -\,Q_{31} & +\,2\,Q_{32} & & = 0, \\ -\,Q_{31} & & +\,2\,Q_{33} & = 1 \end{array}\right\}$$

ergibt sich leicht:

$$Q_{11} = \frac{1}{3}, \qquad Q_{22} = \frac{7}{12}, \qquad Q_{33} = \frac{7}{12}.$$

Ferner berechnet man direkt

$$[p\lambda\lambda] = 0{\cdot}581028,$$

daraus der mittlere Fehler der Gewichtseinheit:

$$\mu = \sqrt{\frac{0{\cdot}581028}{5-3}} = 0{\cdot}539'';$$

endlich

$$\mu_x = 0{\cdot}539\sqrt{\frac{1}{3}} = 0{\cdot}309'',$$

$$\mu_y = 0{\cdot}539\sqrt{\frac{7}{12}} = 0{\cdot}415'' = \mu_z.$$

13. Ableitung empirischer Formeln.

Ein weites und wichtiges Gebiet der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate bildet die **A b l e i t u n g e m p i r i s c h e r F o r m e l n.**

Das Wesen dieses Problems soll zunächst an einem einfachen Beispiele erläutert werden.

Wenn für a, b, V eine Beziehung von der Form

$$V = Xa + Yb \tag{1}$$

vorausgesetzt wird und eine Reihe von zusammengehörigen Werten der Veränderlichen a, b und V durch Beobachtung oder Messung gefunden worden ist, so kann man nach denjenigen Werten x und y von X und Y fragen, welche von den kleinen zufälligen Beob-

achtungs- oder Messungsfehlern möglichst befreit sind, so daß jene Gleichung den Zusammenhang zwischen den Größen a, b und V, wobei a und b auch bekannte Funktionen einer und derselben Veränderlichen c bedeuten können, möglichst genau ausdrückt.

Den Vorgang zur Beantwortung dieser Frage, d. i. zur Ausmittlung der vorteilhaftesten oder wahrscheinlichsten Werte x, y der Konstanten X, Y gibt die Methode der kleinsten Quadrate. Der Grundsatz dieser Methode sagt: Die Konstanten X, Y sind so zu bestimmen, daß die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird. Das heißt: mit verschiedenen Zahlenwerten der Konstanten X, Y würden die nach Gleichung 1) gerechneten Werte V, welche mit v bezeichnet werden mögen, von den beobachteten, welche mit l bezeichnet werden sollen, um verschiedene Größen (die Fehler $-\lambda$) abweichen. Die wahrscheinlichsten Werte der Konstanten sind diejenigen, bei denen die Summe der zweiten Potenzen aller Abweichungen möglichst klein wird.

Sind

$$\begin{array}{l} l_1,\ a_1,\ b_1, \\ l_2,\ a_2,\ b_2, \\ l_3,\ a_3,\ b_3, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ l_n,\ a_n,\ b_n \end{array}$$

die auf die Größen V, a, b bezüglichen Wertsysteme, welche durch Beobachtung gewonnen wurden, so hat man für die Beobachtungsfehler die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + x a_1 + y b_1, \\ \lambda_2 &= -l_2 + x a_2 + y b_2, \\ \lambda_3 &= -l_3 + x a_3 + y b_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_n &= -l_n + x a_n + y b_n \end{aligned}$$

und für deren Quadrate:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_1 &= l_1 l_1 - 2 x a_1 l_1 - 2 y b_1 l_1 + x^2 a_1 a_1 + 2 x y a_1 b_1 + y^2 b_1 b_1, \\ \lambda_2 \lambda_2 &= l_2 l_2 - 2 x a_2 l_2 - 2 y b_2 l_2 + x^2 a_2 a_2 + 2 x y a_2 b_2 + y^2 b_2 b_2, \\ \lambda_3 \lambda_3 &= l_3 l_3 - 2 x a_3 l_3 - 2 y b_3 l_3 + x^2 a_3 a_3 + 2 x y a_3 b_3 + y^2 b_3 b_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_n \lambda_n &= l_n l_n - 2 x a_n l_n - 2 y b_n l_n + x^2 a_n a_n + 2 x y a_n b_n + y^2 b_n b_n. \end{aligned}$$

Als Summe der Fehlerquadrate ergibt sich also:

2) $[\lambda \lambda] = [l l] - 2 x [a l] - 2 y [b l] + x^2 [a a] + 2 x y [a b] + y^2 [b b].$

In dieser Gleichung sind natürlich außer der als Abhängigkeitsvariable zu behandelnden Fehlerquadratsumme $[\lambda \lambda]$ nur die hier

als unabhängige Veränderliche anzusehenden Konstanten x und y der Relation $v = xa + yb$ unbekannt. Soll nun das Minimum der Quadratsumme $[\lambda\lambda]$ ermittelt werden, so muß man die für $[\lambda\lambda]$ gewonnene Funktion 2) einmal in Beziehung auf x und einmal in Beziehung auf y differentiieren, sodann diese beiden Differentialquotienten gleich Null setzen. Dadurch ergeben sich folgende zwei Normalgleichungen zur Bestimmung von x und y:

$$3) \quad \begin{cases} -[al] + x[aa] + y[ab] = 0, \\ -[bl] + x[ab] + y[bb] = 0. \end{cases}$$

Die Auflösung derselben führt zu folgenden Ausdrücken:

$$4) \quad \begin{cases} x = \dfrac{[bb][al] - [ab][bl]}{[aa][bb] - [ab][ab]}, \\[2ex] y = \dfrac{[aa][bl] - [ab][al]}{[aa][bb] - [ab][ab]}. \end{cases}$$

Es ist leicht einzusehen, daß man die Ausdrücke für die Fehler, d. s. die Fehlergleichungen auch in der Form

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + v_1, \\ \lambda_2 &= -l_2 + v_2, \\ \lambda_3 &= -l_3 + v_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_n &= -l_n + v_n \end{aligned}$$

schreiben kann.

Spezielle Fälle.

a) Für die Funktion $V = X + Yb$ erhält man, da $a = 1$, also $[ab] = [b]$, $[al] = [l]$ und $[aa] = 1 + 1 + 1 + \ldots . = n =$ Anzahl der Gleichungen oder Beobachtungen ist:

$$5) \quad \begin{cases} x = \dfrac{[bb][l] - [b][bl]}{n[bb] - [b][b]}, \\[2ex] y = \dfrac{n[bl] - [b][l]}{n[bb] - [b][b]}. \end{cases}$$

b) Für die noch einfachere Funktion $V = Yb$, wo also X gleich Null ist, ergibt sich, da die Fehlergleichungen die Form $\lambda = -l + yb$ haben,

$$6) \quad y = \frac{[bl]}{[bb]}.$$

c) Für den einfachsten Fall $V = Y$, wo es sich also wie im letzten Falle um die Ausmittlung des wahrscheinlichsten Wertes einer einzigen Größe handelt und die Fehlergleichungen die Form $\lambda = -l + y$ haben, ist

7) $$y = \frac{[l]}{n};$$

es ist also dieser Wert das **arithmetische Mittel** aus allen durch Messungen oder Beobachtungen gefundenen Werten.

Nun soll zur allgemeinen Behandlung des Problems geschritten werden.

Es liege ein Beobachtungsmaterial vor, das sich auf die Parameter a, b, c und auf eine von diesen abhängige Größe V bezieht. Dasselbe bestehe aus n Reihen zusammengehöriger Werte

$$l_i,\ a_i,\ b_i,\ c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n).$$

Man soll nunmehr dieses Beobachtungsmaterial durch eine analytische Gleichung

8) $$V = F(X, Y, Z)$$

darstellen, die entweder aus theoretischen Erwägungen hervorgegangen ist oder als Hypothese über den Zusammenhang zwischen V, a, b, c angenommen wurde und außer diesen Größen noch u (= 3) unbekannte Konstanten X, Y, Z enthält.

Zur Lösung dieser Aufgabe schlägt man jenen Weg ein, den die Methode der kleinsten Quadrate für dieses Problem, als einen Fall der Ausgleichungsrechnung, vorschreibt: Man bestimmt die **vorteilhaftesten** Werte x, y, z der Unbekannten und bildet mit diesen die empirische Formel

9) $$v = F(x, y, z),$$

welche gestattet, zu jeder Wertgruppe der Parameter a, b, c den zugehörigen Wert von v zu **berechnen**.

In solchen Fällen handelt es sich nicht mehr um die „Ausgleichung von **Beobachtungsfehlern**“; denn die λ_i, welche sich dann durch die Differenzen

$$\lambda_i = -l_i + v_i$$

darstellen, stammen jetzt nicht allein von den Fehlern her, welche den beobachteten Größen l_i, a_i, b_i, c_i anhaften, sondern viel mehr und meist aus den vereinfachenden Annahmen, welche bei der theoretischen Ableitung des Ansatzes 8) gemacht worden sind, beziehungsweise aus der Hypothese, deren analytischen Ausdruck dieser Ansatz bildet. Die gewonnene Formel 9) kann als eine solche bezeichnet werden, der das Beobachtungsmaterial in seiner Gänze „**möglichst genau** genügt“, und die Summe $[\lambda\lambda]$, die kleinste unter allen, solange man an der Form 8) festhält, repräsentiert ein „**Maß für dieses**

Genügen". Die Gewichte der Unbekannten, wenn man sie mitbestimmt, belehren über den Grad der Sicherheit, mit welchem jede einzelne Unbekannte bestimmt ist. Hat man über dasselbe Beobachtungsmaterial zwei verschiedene Hypothesen in Form von Gleichungen aufgestellt und zu jeder Hypothese die empirische Formel bestimmt, so zeigen die zugehörigen Summen $[\lambda\lambda]$, welche der Hypothesen das Beobachtungsmaterial in seiner Gänze besser darzustellen geeignet ist. Man wird von diesem Gesichtspunkte aus jener Hypothese den Vorzug geben, der das kleinere $[\lambda\lambda]$ zukommt.

Eine allgemeine Entscheidung darüber, wann eine empirische Formel überhaupt geeignet ist, einen Komplex von Beobachtungen analytisch darzustellen, kann nicht gefällt werden. Es hängt dies davon ab, ob die λ_i, zu welchen die Formel führt, innerhalb der Fehlergrenze liegen, mit welcher V beobachtet werden kann, ob sie also Abweichungen vorstellen, die mit Rücksicht auf den verfolgten Zweck vernachlässigt werden dürfen.

14. Beispiele.

1. Beispiel. Bestimmung einer Konstanten. Es sei die Richtung einer Grenze zwischen zwei Grundstücken festzustellen; von dieser Grenze weiß man, daß sie sich von einem noch sicher erkennbaren Punkte geradlinig erstreckt habe. In der Nähe dieser Geraden finden sich auch einige Punkte, von denen man voraussetzen darf, daß sie in der Grenze selbst oder doch sehr nahe derselben gelegen waren. Die Lage dieser Punkte wurde durch rechtwinklige Koordinaten ermittelt; als Abszissenachse diente eine durch den erwähnten sicheren Festpunkt gelegte Gerade und dieser selbst als Koordinatenanfangspunkt.

Für die Koordinaten der erwähnten Punkte wurde in irgend einem Maße gefunden:

$$x_1 = 14{\cdot}2, \qquad y_1 = 0{\cdot}42,$$
$$x_2 = 37{\cdot}5, \qquad y_2 = 1{\cdot}35,$$
$$x_3 = 64{\cdot}0, \qquad y_3 = 2{\cdot}67,$$
$$x_4 = 96{\cdot}1, \qquad y_4 = 3{\cdot}92,$$
$$x_5 = 136{\cdot}7, \qquad y_5 = 5{\cdot}33,$$
$$x_6 = 152{\cdot}4, \qquad y_6 = 6{\cdot}04.$$

Lägen diese Punkte sämtlich in einer durch jenen Festpunkt gezogenen Geraden, so würden die Ordinaten dieser Punkte in aller Strenge eine Gleichung von der Form

1) $$y = a\,x$$

befriedigen und jeder Punkt würde somit für $\frac{y}{x}$ denselben Wert ergeben. Dies trifft indessen nicht zu und es kommt daher darauf an, die wahrscheinlichste Richtung jener Geraden zu bestimmen, bei der für die gemessenen Abszissen die Summe der Quadrate der Abweichungen ihrer Ordinaten von den gemessenen Ordinaten, also die Summe der Quadrate der plausiblen Fehler ein Minimum wird.

Ist y_i die beobachtete Ordinate eines Punktes, so gibt diese Anlaß zu der Fehlergleichung:

$$\lambda_i = -y_i + a x_i;$$

es ist dann

$$\lambda_i \lambda_i = y_i y_i + x_i x_i a^2 - 2 x_i y_i a.$$

Soll demnach $[\lambda \lambda]$ ein Minimum werden, so muß a derart bestimmt werden, daß der Bedingungsgleichung

2) $$\frac{1}{2} \frac{d[\lambda \lambda]}{d a} = [x x] a - [x y] = 0$$

genügt wird; daraus folgt:

3) $$a = \frac{[x y]}{[x x]}.$$

Berechnet man die Produkte $x y$ und $x x$, bildet sodann die Summen $[x y]$ und $[x x]$, so findet man:

$$[x y] = 2258{\cdot}5, \qquad [x x] = 56852;$$

hiemit ergibt sich:

4) $$a = 0{\cdot}039635.$$

Durch Einführung dieses Wertes in die Gleichung 1) findet man für die gemessenen Werte von x die entsprechenden y; hierauf kann man die Differenzen dieser gerechneten y gegen die gemessenen y, nämlich die Größen λ, und die Quadrate dieser Differenzen bestimmen.

Nachstehende Tabelle enthält die genannten Angaben.

Nr.	y gerechnet	λ	$\lambda \lambda$
1	0·56	+ 0·14	0·020
2	1·49	+ 0·14	0·020
3	2·54	— 0·13	0·017
4	3·81	— 0·11	0·012
5	5·42	+ 0·09	0·008
6	6·04	0·00	0·000

Die Summe $[\lambda\lambda]$ beträgt 0·077.

Man könnte leicht vermuten, diese Aufgabe ließe sich leichter lösen, wenn man für jede zusammengehörige Messung y durch x dividiert und aus den so gefundenen Werten für a das arithmetische Mittel nimmt. Dieser Vorgang ist indessen keineswegs begründet, und man überzeugt sich leicht, daß alsdann die Summe der Fehlerquadrate bedeutend größer wird. Die in dieser Weise gerechneten Werte von a sind in der zweiten Kolonne der nachstehenden Tabelle angegeben. Das arithmetische Mittel derselben beträgt 0·03778; die unter Zugrundelegung dieses Wertes von a für die gemessenen x gerechneten y sind in der dritten Kolonne angegeben. Die Tabelle enthält ferner die Differenzen der gerechneten y gegen die gemessenen y und die Quadrate dieser Differenzen, nämlich die Größen λ und $\lambda\lambda$. Die Summe der Quadrate der plausiblen Fehler, nämlich $[\lambda\lambda]$, stellt sich dabei auf 0·268, ist also mehr wie dreimal so groß wie früher.

Nr.	a	y gerechnet	λ	$\lambda\lambda$
1	0·02958	0·54	+ 0·12	0·014
2	0·03600	1·42	+ 0·07	0·005
3	0·04172	2·42	— 0·25	0·062
4	0·04079	3·63	— 0·29	0·084
5	0·03899	5·17	— 0·16	0·025
6	0·03963	5·76	— 0·28	0·078

2. **Beispiel. Bestimmung von zwei Konstanten.** Es sei wieder die wahrscheinlichste Lage einer geradlinigen Grenze zu ermitteln, für welche jedoch kein ganz sicherer Festpunkt vorhanden ist; es bezeichnen nur vier Stellen annähernd die Lage dieser Grenze. In Bezug auf ein beliebig gewähltes Koordinatensystem werden die Koordinaten dieser vier Punkte gemessen und man findet für diese Koordinaten:

$$x_1 = 0, \qquad y_1 = 3{\cdot}5,$$
$$x_2 = 88, \qquad y_2 = 5{\cdot}7,$$
$$x_3 = 182, \qquad y_3 = 8{\cdot}2,$$
$$x_4 = 274, \qquad y_4 = 10{\cdot}3.$$

Die Gerade, die sich diesen Punkten möglichst anschließen soll, sei durch die Gleichung gegeben

1) $$y = a\,x + b,$$

worin a und b noch unbekannt und somit zu bestimmen sind.

Ist y_i der Wert einer beobachteten Ordinate, so gibt diese Anlaß zu der Fehlergleichung

$$\lambda_i = -y_i + a x_i + b.$$

Man erhält alsdann so viele Fehlergleichungen als Messungen gemacht wurden. Im vorliegenden Falle sind vier Messungen gemacht worden; man erhält daher vier Fehlergleichungen. Die Methode der kleinsten Quadrate gibt nun jenes Wertsystem der Konstanten a, b als das diesen vier Gleichungen am besten entsprechende an, welches die Summe der Quadrate der λ zu einem Minimum macht. Die Bedingungen hiefür lauten:

$$\frac{\partial[\lambda\lambda]}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial[\lambda\lambda]}{\partial b} = 0.$$

Nun ist

$$\lambda\lambda = yy + xxa^2 + b^2 - 2xya - 2yb + 2xab;$$

wenn daher $[\lambda\lambda]$ ein Minimum werden soll, muß stattfinden:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial[\lambda\lambda]}{\partial a} = [xx]a - [xy] + [x]b = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial[\lambda\lambda]}{\partial b} = [1]b - [y] + [x]a = 0,$$

oder

$$2) \quad \begin{cases} [xx]a + [x]b = [xy], \\ [x]a + [1]b = [y]. \end{cases}$$

Das sind die **Normalgleichungen**, aus welchen die wahrscheinlichsten Werte von a und b bestimmt werden können.

Nach den durch die Messung gefundenen Größen ergibt sich:

$$[x] = 544,$$
$$[y] = 27{\cdot}7,$$
$$[1] = 4,$$
$$[xx] = 115944,$$
$$[xy] = 4816{\cdot}2.$$

Es lauten sonach für den vorliegenden Fall die Normalgleichungen:

$$115944\,a + 544\,b = 4816{\cdot}2$$
$$544\,a + 4\,b = 27{\cdot}7;$$

die Auflösung derselben gibt:

$$a = \frac{-544 \times 27{\cdot}7 + 4 \times 4816{\cdot}2}{115944 \times 4 - 544^2} = 0{\cdot}025,$$

$$b = \frac{-4816{\cdot}2 \times 544 + 27{\cdot}7 \times 115944}{115944 \times 4 - 544^2} = 3{\cdot}525.$$

Die gesuchte wahrscheinlichste Grenze ist demnach für dasselbe Koordinatensystem durch die Gleichung

$$y = 0{\cdot}025\,x + 3{\cdot}525$$

gegeben.

Berechnet man hiernach für die gemessenen x die zugehörigen y und vergleicht diese mit den gemessenen y, so ergibt sich:

Nr.	x	y gerechnet	y gemessen	λ	$\lambda\lambda$
1	0	3·525	3·500	+ 0·025	0·000625
2	88	5·725	5·700	+ 0·025	0·000625
3	182	8·075	8·200	— 0·125	0·015625
4	274	10·375	10·300	+ 0·075	0·005625

Die Summe der Quadrate der scheinbaren Fehler beträgt also 0·0225 und ist kleiner, als wenn man irgend eine andere Gerade gewählt hätte.

Die zwei vorgeführten Beispiele wurden der Wahrscheinlichkeitsrechnung von G. Hagen (3. Auflage, 1882) entnommen.

3. Beispiel. Bestimmung von zwei Konstanten. Aus einer Anzahl von Längenmessungen eines Stabes bei verschiedenen Temperaturen ist die Länge desselben für 0^0 und seine Verlängerung für 1^0 Temperaturerhöhung abzuleiten.*)

Nennt man a die Länge des Stabes bei 0^0, b die Verlängerung desselben für 1^0, so ist für die Temperatur t^0 die Länge u

$$u = a + b\,t;$$

hierin bedeuten a und b die unbekannten, zu bestimmenden Konstanten, u und t die beobachteten Größen. Zur Bestimmung von a und b würden zwei Beobachtungen genügen. Wären also nur für die Temperaturen t_1 und t_2 die respektiven Längen u_1 und u_2 beobachtet worden, so würde aus $u_1 = a + b\,t_1$ und $u_2 = a + b\,t_2$ folgen:

$$a = \frac{t_1 u_2 - t_2 u_1}{t_1 - t_2}, \qquad b = \frac{u_1 - u_2}{t_1 - t_2}.$$

Es mögen aber außer t_1, u_1 und t_2, u_2 noch die zusammengehörigen Wertepaare t_3, u_3; t_4, u_4 u. s. w. vorliegen. Wären die Beobachtungen fehlerfrei, so würden sich für die gesuchten Größen a

*) Entnommen aus: Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik. Zehnte, vermehrte Auflage, 1905, Seite 11.

und b, aus welchen zwei Paaren immer auch berechnet, stets dieselben Zahlenwerte ergeben. In Wirklichkeit jedoch findet man der den Beobachtungen anhaftenden Fehler wegen keine Zahlen für a und b, die den sämtlichen Beobachtungen völlig genügen.

Sind bei den Temperaturen t_1, t_2, ..., t_n die Längen u_1, u_2, ..., u_n beobachtet worden, so sind a und b wieder so zu bestimmen, daß

$$(-u_1 + a + b\,t_1)^2 + (-u_2 + a + b\,t_2)^2 + \cdots\cdots + (-u_n + a + b\,t_n)^2$$

oder kurz

$$[(-u + a + b\,t)]^2$$

ein Minimum wird.

Zu diesem Zwecke hat man den Ausdruck $[(-u + a + b\,t)]^2$ nach a und b zu differentiieren und jeden partiellen Differentialquotienten gleich Null zu setzen.

Die Differentiation ergibt:

$$\text{nach } a \qquad [-u + a + b\,t] = 0,$$
$$\text{nach } b \qquad [t\,(-u + a + b\,t)] = 0,$$

oder, weil hier $[a] = n\,a$ ist,

$$-[u] + n\,a + b\,[t] = 0,$$
$$-[t\,u] + a\,[t] + b\,[t\,t] = 0.$$

Aus diesen Gleichungen findet man:

$$a = \frac{[t]\,[t\,u] - [u]\,[t\,t]}{[t]^2 - n\,[t\,t]},$$
$$b = \frac{[t]\,[u] - n\,[t\,u]}{[t]^2 - n\,[t\,t]}.$$

Als kurzes Beispiel einer Zahlenrechnung wird ein Meterstab angenommen, der auch für das Messen bei höheren Temperaturen dienen soll. Durch Vergleichung mit einem Normalmaßstabe sei gefunden:

bei der Temperatur $t_1 = 20^0$ die Länge $u_1 = 1000{\cdot}22\ mm$,
„ „ „ $t_2 = 40^0$ „ „ $u_2 = 1000{\cdot}65\ mm$,
„ „ „ $t_3 = 50^0$ „ „ $u_3 = 1000{\cdot}90\ mm$,
„ „ „ $t_4 = 60^0$ „ „ $u_4 = 1001{\cdot}05\ mm$.

Nach diesen Beobachtungen soll die Länge u bei der Temperatur t als $u = a + b\,t$ dargestellt werden.

Zur Vereinfachung der Zahlenrechnung ziehe man von allen Längen u den Betrag $1000\ mm$ ab und nenne den Rest r, dann erhält

man für a auch nur den Überschuß der Länge bei 0° über 1 m. Die Rechnung stellt sich in folgender Tabelle dar:

Nr.	t	r	tt	tr
1	20	+ 0·22	400	4·4
2	40	+ 0·65	1600	26·0
3	50	+ 0·90	2500	45·0
4	60	+ 1·05	3600	63·0
	170 $[t]$	2·82 $[r]$	8100 $[tt]$	138·4 $[tr]$

Man findet sonach:

$$a = \frac{170 \times 138{\cdot}4 - 2{\cdot}82 \times 8100}{170^2 - 4 \times 8100} = - 0{\cdot}196\ mm,$$

$$b = \frac{170 \times 2{\cdot}82 - 4 \times 138{\cdot}4}{170^2 - 4 \times 8100} = + 0{\cdot}0212.$$

Die Länge des Stabes bei 0° ist also gleich $1000 - 0{\cdot}196 = 999{\cdot}804\ mm$ zu setzen und bei der Temperatur t^0 beträgt die Stablänge in mm:

$$u = 999{\cdot}804 + 0{\cdot}0212\, t.$$

Hiernach berechnen sich die Längen für 20°, 40°, 50°, 60°; dieselben sind aus nachstehender Tabelle zu entnehmen:

Nr.	t in Zentigraden	u in mm gerechnet	u in mm beobachtet	λ in mm	$\lambda\lambda$
1	20	1000·228	1000·22	+ 0·008	0·000064
2	40	1000·652	1000·65	+ 0·002	0004
3	50	1000·864	1000·90	— 0·036	1296
4	60	1001·076	1001·05	+ 0·026	0676

Die Summe der Quadrate der scheinbaren Fehler beträgt demnach 0·002040; jede Änderung von a oder b vergrößert die Summe der Fehlerquadrate, wovon man sich leicht überzeugen kann.

Den vorhergehenden drei Beispielen liegt die Voraussetzung gleich genauer Beobachtungen zu Grunde. Diese Voraussetzung findet jedoch oft auch dann nicht statt, wenn die Beobachtungsart dieselbe ist. Es seien deshalb noch hinsichtlich der Bestimmung von Gewichten der einzelnen Beobachtungen die folgenden Bemerkungen beigefügt.

Vielfach kommt es darauf an, aus sehr verschiedenartigen Beobachtungen, die an sich keineswegs mit gleicher Schärfe angestellt sind, Resultate zu ziehen. Man darf alsdann augenscheinlich nicht allen gleiches Gewicht beilegen, man muß vielmehr das Gewicht der einzelnen Messungen zu bestimmen oder wenigstens zu schätzen versuchen und es angemessen in Rechnung stellen. Wenn es sich z. B. um Winkelmessungen handelt, wobei verschiedene Instrumente benützt wurden, von denen teils einzelne Minuten, teils aber nur je 10 Minuten abgelesen werden konnten, so dürfen diese keineswegs als gleich gewichtig angesehen werden. Wenn aber auch mit demselben Apparate dieselbe Art der Beobachtung jedoch unter verschiedenen Umständen mehrfach wiederholt wird, so geschieht es oft, daß die äußeren Einwirkungen auffallend günstig oder besonders ungünstig sind; man gewinnt sogleich die Überzeugung, daß die Beobachtungen sehr verschiedene Gewichte haben.

Die genaue Ermittlung der Gewichte der einzelnen Beobachtungen ist unbedingt sehr schwierig und erfordert jedenfalls große Sorgfalt und volle Unbefangenheit. Besonders muß man sich hüten, aus der Übereinstimmung einiger Beobachtungen unter sich auf die besondere Schärfe derselben zu schließen, oder anderseits denjenigen allen Wert abzusprechen oder gar kein Gewicht beizulegen, welche große Abweichungen zeigen. In diesem Falle würde man keineswegs das wahrscheinlichste, sondern nur ein solches Resultat erhalten, welches sich an diejenigen Beobachtungen anschließt, die zufällig miteinander übereinstimmen. Bei dem verschiedenartigen Auftreten der Fehler kann es leicht geschehen, daß gerade diejenige Messung, welche von den übrigen am stärksten abweicht, zur Berichtigung des Resultates wesentlich beiträgt. Man muß daher unbedingt den Grundsatz befolgen, daß keine Messung oder Beobachtung von der Rechnung ausgeschlossen werden darf, außer man hat, während sie gemacht wurde, bemerkt, daß sie nicht richtig oder doch sehr zweifelhaft sei. Dagegen erscheint es nicht nur gerechtfertigt, sondern sogar notwendig, denjenigen Beobachtungen ein größeres beziehungsweise geringeres Gewicht beizulegen, von denen man sich mit Rücksicht auf die äußeren Umstände überzeugt hat, daß sie bedeutend sicherer beziehungsweise weniger sicher sind als die übrigen.

15. Näherungsweise Darstellung von Funktionen. Beispiele.

Will man eine Funktion innerhalb gewisser Grenzen der Veränderlichen durch eine andere Funktion derselben Veränderlichen

darstellen, so kann man hiezu die Methode der kleinsten Quadrate anwenden. Der Vorgang hiebei soll an einigen Beispielen gezeigt werden.

Beispiele.

1. Beispiel. Eine Gerade zu ziehen, die einer Kurve möglichst nahe kommt.*)

Es sei die Gleichung einer Kurve

1) $$y = f(x).$$

gegeben. Man soll eine Gerade führen, die von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ dieser Kurve möglichst nahe kommt.

Es sei

2) $$\eta = a\xi + b$$

die Gleichung der gesuchten Geraden. Die Aufgabe geht, wie man sieht, dahin aus, die Koeffizienten a und b zu bestimmen. Die Koordinaten der Kurvenpunkte, welche den zwischen $x = \alpha$ und $x = \beta$ liegenden Abszissen entsprechen, werden im allgemeinen die Gleichung 2) nicht befriedigen; nur für die Koordinaten der Schnittpunkte von Kurve und Gerade wird dies zutreffen. Angenommen, man erhält, wenn man die Koordinaten x_i, y_i des Kurvenpunktes P_i in die Gleichung der Geraden einsetzt,

$$\lambda_i = -y_i + a x_i + b.$$

Es besteht also das System der Fehlergleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -y_1 + a x_1 + b, \\ \lambda_2 &= -y_2 + a x_2 + b, \\ \lambda_3 &= -y_3 + a x_3 + b, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Die Fehlergleichungen kann man sich durch die sprungweise Änderung von x im Intervalle dx entstanden denken und es kommt denselben notwendig gleiches Gewicht zu, doch hat die Wahl der Gewichtseinheit auf das Endresultat keinen Einfluß.

Aus dem System der Fehlergleichungen erhält man für ein angenommenes Wertepaar a, b ein bestimmtes System der Werte λ,

*) Entnommen dem Werke: Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadratsummen von Dr. J. Dienger, 1857, Seite 121.



so daß eine jede solche Annahme als eine Ursache anzusehen ist, aus der als Wirkung ein gewisses System der λ fließt. Für die zu suchende Gerade wird offenbar jenes Wertepaar a, b am vorteilhaftesten entsprechen, für welches die Summe der Quadrate der λ am kleinsten wird.

Nun ist

$$[\lambda\lambda] = [yy] + [xx]\,a^2 + [1]\,b^2 - 2\,[xy]\,a - 2\,[y]\,b + 2\,[x]\,a\,b.$$

Man erhält sonach als Bedingungsgleichungen, damit ein Minimum stattfindet (vergleiche mit dem 2. Beispiel des Punktes 14 dieses Abschnittes):

$$\frac{1}{2}\frac{\partial[\lambda\lambda]}{\partial a} = [xx]\,a - [xy] + [x]\,b = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial[\lambda\lambda]}{\partial b} = \quad [1]\,b - [y] \quad + [x]\,a = 0,$$

oder

$$3)\qquad \begin{cases} [xx]\,a + [x]\,b = [xy], \\ [x]\,a + [1]\,b = [y]. \end{cases}$$

Der Bereich der Variablen x ist das Kontinuum der reellen Zahlen zwischen α und β. Bei der Summierung hat man sich demnach vorzustellen, daß x alle Werte von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ annimmt; dies wird, wie bereits gesagt, dadurch erreicht, daß man x um die unendlich kleine Größe dx wachsen läßt; die Summierung ist also ein Integrationsprozeß. Multipliziert man demnach die Gleichungen 3) mit dx, nimmt also dx als Gewicht, und integriert sodann zwischen den Grenzen α bis β, so erhält man die Normalgleichungen für die Unbekannten a und b:

$$4)\qquad \begin{cases} a\int_\alpha^\beta x^2\,dx + b\int_\alpha^\beta x\,dx = \int_\alpha^\beta x\,y\,dx, \\ a\int_\alpha^\beta x\,dx + b\int_\alpha^\beta dx \quad = \int_\alpha^\beta y\,dx, \end{cases}$$

wobei y als Funktion von x mittels der Kurvengleichung gegeben ist. Die Integrale in den linken Teilen der beiden Gleichungen sind leicht zu finden. Durch Auflösung der Gleichungen 4) ergibt sich dann:

$$5)\quad \begin{cases} a = \dfrac{(\beta-\alpha)\displaystyle\int_\alpha^\beta x\,y\,d\,x - \frac{\beta^2-\alpha^2}{2}\int_\alpha^\beta y\,d\,x}{(\beta-\alpha)\,\dfrac{\beta^3-\alpha^3}{3} - \left(\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2}\right)^2} = \\[2ex] = \dfrac{\displaystyle\int_\alpha^\beta x\,y\,d\,x - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\int_\alpha^\beta y\,d\,x}{\dfrac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3) - \dfrac{1}{4}(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2)}, \\[2ex] b = \dfrac{\dfrac{\beta^3-\alpha^3}{3}\displaystyle\int_\alpha^\beta y\,d\,x - \frac{\beta^2-\alpha^2}{2}\int_\alpha^\beta x\,y\,d\,x}{(\beta-\alpha)\,\dfrac{\beta^3-\alpha^3}{3} - \left(\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2}\right)^2}, \end{cases}$$

wodurch die Gleichung der fraglichen Geraden gefunden ist.

Sucht man den Inhalt jener Fläche, welche von dieser Geraden, den Ordinaten für $x=\alpha$ und $x=\beta$, ferner von der Abszissenachse eingeschlossen ist, so ergibt sich mit Rücksicht auf die zweite der Gleichungen 4)

$$\int_\alpha^\beta (a\,\xi + b)\,d\,\xi = a\int_\alpha^\beta \xi\,d\,\xi + b\int_\alpha^\beta d\,\xi = a\,\frac{\beta^2-\alpha^2}{2} + b\,(\beta-\alpha) = \int_\alpha^\beta y\,d\,x,$$

so daß diese Fläche genau so groß ist als diejenige, welche von der Kurve $y=f(x)$, den zu denselben Abszissen $x=\alpha$ und $x=\beta$ gehörigen Ordinaten dieser Kurve, sowie von der Abszissenachse begrenzt ist.

Es versteht sich von selbst, daß man statt einer Geraden eine parabolische Kurve

$$\eta = a + b\,\xi + c\,\xi^2 + \ldots\ldots.$$

verlangen könnte, welche dieselbe Eigenschaft des möglichst nahen Anschließens haben soll. Beschränkt man sich im rechten Teil auf die drei ersten Glieder, so hat man

$$\lambda = -\,y + a + b\,x + c\,x^2,$$

$$[\lambda\,\lambda] = [y^2] + [1]\,a^2 + b^2\,[x^2] + c^2\,[x^4] - 2\,a\,[y] - 2\,b\,[x\,y] -$$
$$-\,2\,c\,[x^2\,y] + 2\,a\,b\,[x] + 2\,a\,c\,[x^2] + 2\,b\,c\,[x^3].$$

Zur Bestimmung von a, b, c ergeben sich demnach die Gleichungen:

$$6)\quad \begin{cases} a\int_\alpha^\beta dx + b\int_\alpha^\beta x\,dx + c\int_\alpha^\beta x^2\,dx = \int_\alpha^\beta y\,dx, \\ a\int_\alpha^\beta x\,dx + b\int_\alpha^\beta x^2 dx + c\int_\alpha^\beta x^3\,dx = \int_\alpha^\beta x\,y\,dx, \\ a\int_\alpha^\beta x^2 dx + b\int_\alpha^\beta x^3 d\,x + c\int_\alpha^\beta x^4\,dx = \int_\alpha^\beta x^2\,y\,dx. \end{cases}$$

Die von der parabolischen Kurve, den Ordinaten für $x=\alpha$ und $x=\beta$, sowie von der Abszissenachse eingeschlossene Fläche ist gegeben durch:

$$\int_\alpha^\beta (a + b\,\xi + c\,\xi^2)\,d\,\xi = a\int_\alpha^\beta d\,\xi + b\int_\alpha^\beta \xi\,d\,\xi + c\int_\alpha^\beta \xi^2\,d\,\xi.$$

Mit Rücksicht auf die erste der Gleichungen 6) ist diese Fläche auch gleich $\int_\alpha^\beta y\,dx$, also wieder genau so groß als die Fläche, welche von der Kurve $y=f(x)$, den zu denselben Abszissen $x=\alpha$ und $x=\beta$ gehörigen Ordinaten dieser Kurve und von der Abszissenachse eingeschlossen ist.

Da auch

$$\int_\alpha^\beta (a + b\,\xi + c\,\xi^2)\,\xi\,d\,\xi = \int_\alpha^\beta x\,y\,dx,$$

so liegen die Schwerpunkte beider Flächen in derselben Parallelen zur y Achse, was auch für den früheren Fall gilt.

2. Beispiel. Es soll der Ausdruck $\sqrt{1+x}$ zwischen den Grenzen -1 und $+1$ durch einen Ausdruck von der Form $1+ax$ so ersetzt werden, daß die Summe der Quadrate der Differenzen $\sqrt{1+x}-(1+ax)$ ein Minimum werde.*)

Bildet man die Fehlergleichung

$$1)\qquad \lambda = -\sqrt{1+x} + (1+a\,x)$$

oder

$$2)\qquad \lambda = -(\sqrt{1+x} - 1) + a\,x,$$

*) Entnommen dem Werke: Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate von F. R. Helmert, 1872, Seite 279.

so ist dieselbe der Repräsentant aller Fehlergleichungen, die entstehen, wenn man x alle Werte zwischen -1 und $+1$ annehmen läßt. Erfolgt die Änderung von x sprungweise im Intervall dx, so kommt den Fehlergleichungen notwendig gleiches Gewicht zu, doch hat die Wahl der Gewichtseinheit auf das Endresultat keinen Einfluß.

Aus 2) folgt:

$$\lambda\lambda = 2 + x - 2\sqrt{1+x} + a^2 x^2 - 2ax(\sqrt{1+x} - 1);$$

ferner ist

$$\frac{1}{2}\frac{d(\lambda\lambda)}{da} = a x^2 - (x\sqrt{1+x} - x).$$

Nimmt man also dx als Gewicht und bildet die Normalgleichung für die Unbekannte a, so ergibt sich

$$a\,[x x\,d x]_{-1}^{+1} = [(x\sqrt{1+x} - x)\,dx]_{-1}^{+1}$$

und hieraus

$$3)\qquad a = \frac{\int_{-1}^{+1}(x\sqrt{1+x} - x)\,dx}{\int_{-1}^{+1} x^2\,dx}.$$

Berücksichtigt man, daß bei Anwendung der Substitution $\sqrt{1+x} = y$ sich ergibt:

$$\int_{-1}^{+1} x\sqrt{1+x}\,dx = 2\int_0^{\sqrt{2}} y^2(y^2-1)\,dy = \frac{4\sqrt{2}}{15},$$

so folgt

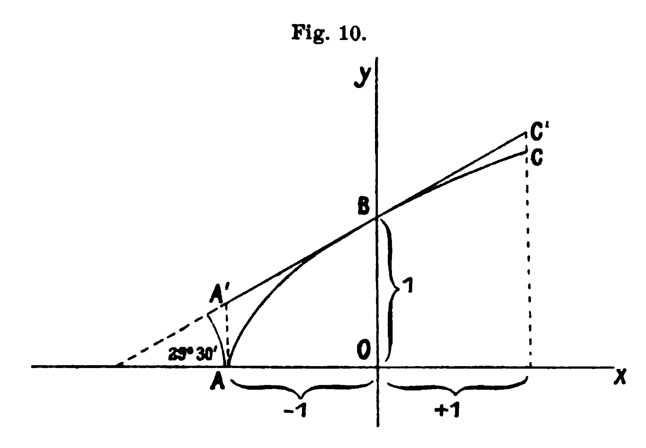
$$4)\qquad a = \frac{2\sqrt{2}}{5} = 0{\cdot}5657.$$

Die geometrische Bedeutung ist die folgende:

Es ist eine Parabel (Fig. 10) mit dem Parameter 1 gegeben, bezogen auf rechtwinklige Koordinatenachsen parallel und senkrecht zur Parabelachse mit dem Ursprunge O im Abstand 1 vom Scheitel. Die Ordinatenachse schneidet die Parabel in B. Legt man durch diesen Punkt eine Gerade $A'C'$, welche mit der Parabelachse den Winkel $29^0 30'$, der zu $arc\,tg\,a$ gehört, einschließt, so ist die Summe der Quadrate der Differenzen der Ordinaten für gleiche Abszissen beim Parabelbogen und bei der Geraden für alle Werte der Abszissen zwischen -1 und $+1$ ein Minimum. Wie man sich durch Rechnung leicht überzeugt, ist die Gerade $A'C'$ keine Parabeltangente.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, daß die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die zwei durchgeführten Bei-

Fig. 10.



spiele und auf ähnliche Fälle völlig willkürlich ist und ihr hiebei durchaus kein tieferer Sinn innewohnt als der bei der Ausgleichung von Beobachtungen. Man bedient sich dieser Methode aber deshalb, weil sie in der Regel die bequemste Rechnung gibt, um der gegebenen Funktion eine einfachere Funktion möglichst anzupassen.

3. Beispiel. Näherungsweise Berechnung von $\sqrt{x^2+y^2}$.*)

Poncelet hat die Wurzelgröße $\sqrt{x^2+y^2}$ näherungsweise berechnet, indem er

$$\sqrt{x^2+y^2} = a\,x + b\,y$$

setzte und die Koeffizienten a, b für gewisse Grenzen des Verhältnisses $\frac{y}{x}$ bestimmte. Diese Bestimmung wird mittels folgender Betrachtungen durchgeführt:

Man setze

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi,$$

dann ist:

$$\sqrt{x^2+y^2} = r, \qquad a\,x + b\,y = r\,(a\cos\varphi + b\sin\varphi),$$

so daß also die Beziehung

1) $\quad 1 = a\cos\varphi + b\sin\varphi \quad$ oder $\quad a\cos\varphi + b\sin\varphi - 1 = 0$

stattfinden muß. Da ferner $\frac{y}{x} = tg\,\varphi$ ist, so sind, wenn die Grenzen des

*) Entnommen dem Werke: Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadratsummen von Dr. J. Dienger, 1857, Seite 118.



Quotienten $\frac{y}{x}$ gewählt sind, auch die von φ bekannt. Angenommen, es seien φ_0 und φ_1 die Grenzen, innerhalb deren φ schwankt, so ist von vornherein klar, daß die Gleichung 1) nicht für alle zwischen φ_0 und φ_1 gelegene Werte befriedigt werden kann; man wird sich demnach begnügen müssen, a und b so zu bestimmen, daß der Ausdruck $a \cos\varphi + b \sin\varphi$ der Einheit so genau als möglich gleichkomme. Für den zwischen φ_0 und φ_1 gelegenen Winkel φ_i erhält man als Fehlergleichung

$$\lambda_i = a \cos\varphi_i + b \sin\varphi_i - 1;$$

man hat alsdann das System der Fehlergleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a \cos\varphi_1 + b \sin\varphi_1 - 1, \\ \lambda_2 &= a \cos\varphi_2 + b \sin\varphi_2 - 1, \\ \lambda_3 &= a \cos\varphi_3 + b \sin\varphi_3 - 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Der Bereich der Veränderlichen φ ist das Kontinuum der reellen Winkel zwischen φ_0 und φ_1. Die Zahl der Gleichungen ist unendlich groß; man kann sich dieselben durch die sprungweise Änderung von φ im Intervall $d\varphi$ entstanden denken. Diesen Fehlergleichungen kommt notwendig gleiches Gewicht zu; die Wahl der Gewichtseinheit hat aber auf das Endresultat keinen Einfluß.

Aus dem aufgestellten Gleichungssystem erhält man für ein angenommenes Wertepaar a, b ein bestimmtes System der Werte λ. Es wird nun jenes Wertepaar dem Gleichungssystem am vorteilhaftesten entsprechen, für welches die Summe der Quadrate der λ ein Minimum wird.

Da nun

$$\lambda_i \lambda_i = a^2 \cos^2\varphi_i + b^2 \sin^2\varphi_i + 1 + 2\,a\,b \sin\varphi_i \cos\varphi_i - 2\,a \cos\varphi_i - 2\,b \sin\varphi_i$$

ist, so erhält man als Bedingungsgleichungen für das Minimum:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial[\lambda\lambda]}{\partial a} = a\,[\cos^2\varphi] + b\,[\sin\varphi\cos\varphi] - [\cos\varphi] = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial[\lambda\lambda]}{\partial b} = b\,[\sin^2\varphi] + a\,[\sin\varphi\cos\varphi] - [\sin\varphi] = 0,$$

oder

$$2)\qquad \begin{cases} a\,[\cos^2\varphi] + b\,[\sin\varphi\cos\varphi] = [\cos\varphi], \\ a\,[\sin\varphi\cos\varphi] + b\,[\sin^2\varphi] = [\sin\varphi]. \end{cases}$$

Bei der Summierung hat man sich vorzustellen, daß φ alle Werte von $\varphi = \varphi_0$ bis $\varphi = \varphi_1$ annimmt; man erreicht dies dadurch, daß man, wie bereits gesagt wurde, φ um die unendlich kleine

Größe $d\varphi$ wachsen läßt, also $d\varphi$ als Gewicht annimmt. Die Summierung ist demnach ein Integrationsprozeß. Multipliziert man daher die Gleichungen 2) mit $d\varphi$ und integriert hierauf zwischen den Grenzen φ_0 bis φ_1, so erhält man die Normalgleichungen zur Bestimmung der Unbekannten a und b:

$$3) \begin{cases} a\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos^2\varphi\, d\varphi + b\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos\varphi\, d\varphi, \\ a\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin\varphi\, \cos\varphi\, d\varphi + b\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin^2\varphi\, d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin\varphi\, d\varphi. \end{cases}$$

Von der Integrationskonstanten abgesehen, ist nun bekanntlich:

$$\int \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi,$$

$$\int \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\varphi,$$

$$\int \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\sin^2\varphi,$$

$$\int \cos\varphi\, d\varphi = \sin\varphi,$$

$$\int \sin\varphi\, d\varphi = -\cos\varphi;$$

man hat ferner:

$$\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_0 = 2\cos(\varphi_1 + \varphi_0)\sin(\varphi_1 - \varphi_0),$$

$$\sin\varphi_1 - \sin\varphi_0 = 2\cos\frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2},$$

$$\sin^2\varphi_1 - \sin^2\varphi_0 = \sin(\varphi_1 + \varphi_0)\sin(\varphi_1 - \varphi_0),$$

$$\cos\varphi_1 - \cos\varphi_0 = -2\sin\frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2}.$$

Daher ergibt sich nach Ausführung der Integrationen

$$a\{\cos(\varphi_1 + \varphi_0)\sin(\varphi_1 - \varphi_0) + \varphi_1 - \varphi_0\} + b\sin(\varphi_1 + \varphi_0)\sin(\varphi_1 - \varphi_0) =$$
$$= 4\cos\frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2},$$

$$a\sin(\varphi_1 + \varphi_0)\sin(\varphi_1 - \varphi_0) + b\{\varphi_1 - \varphi_0 - \cos(\varphi_1 + \varphi_0)\sin(\varphi_1 - \varphi_0)\} =$$
$$= 4\sin\frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2}.$$

Durch Auflösung dieser zwei Gleichungen findet man:

$$4)\quad \begin{cases} a = \dfrac{4\cos\dfrac{\varphi_1+\varphi_0}{2}\sin\dfrac{\varphi_1-\varphi_0}{2}}{\varphi_1-\varphi_0+\sin(\varphi_1-\varphi_0)}, \\ b = \dfrac{4\sin\dfrac{\varphi_1+\varphi_0}{2}\sin\dfrac{\varphi_1-\varphi_0}{2}}{\varphi_1-\varphi_0+\sin(\varphi_1+\varphi_0)}; \end{cases}$$

selbstverständlich ist hierin $\varphi_1-\varphi_0$ im analytischen Maße (Bogenmaß) einzusetzen. Führt man diese Werte in $\sqrt{x^2+y^2}=ax+by$ ein, so erhält man schließlich:

$$5)\quad \sqrt{x^2+y^2} = \frac{4\sin\dfrac{\varphi_1-\varphi_0}{2}\left(x\cos\dfrac{\varphi_1+\varphi_0}{2}+y\sin\dfrac{\varphi_1+\varphi_0}{2}\right)}{\varphi_1-\varphi_0+\sin(\varphi_1-\varphi_0)}.$$

Diese Formel wurde zuerst von Redtenbacher aufgestellt und weicht allerdings wesentlich von jener ab, die Poncelet gegeben hat.

Setzt man hierin $x=r\cos\varphi$ und $y=r\sin\varphi$, so findet somit näherungsweise statt:

$$6)\quad 1 = \frac{4\sin\dfrac{\varphi_1-\varphi_0}{2}\left(\cos\varphi\cos\dfrac{\varphi_1+\varphi_0}{2}+\sin\varphi\sin\dfrac{\varphi_1+\varphi_0}{2}\right)}{\varphi_1-\varphi_0+\sin(\varphi_1-\varphi_0)}$$

Diese Gleichung ergibt sich auch aus 1), wenn man hierin die für a und b gefundenen Werte einsetzt. Der begangene Fehler ist mithin gleich

$$\frac{4\sin\dfrac{\varphi_1-\varphi_0}{2}\left(\cos\varphi\cos\dfrac{\varphi_1+\varphi_0}{2}+\sin\varphi\sin\dfrac{\varphi_1+\varphi_0}{2}\right)}{\varphi_1-\varphi_0+\sin(\varphi_1-\varphi_0)} - 1.$$

Diese Größe wird ein Maximum für

$$-\sin\varphi\cos\frac{\varphi_1+\varphi_0}{2}+\cos\varphi\sin\frac{\varphi_1+\varphi_0}{2}=0,$$

oder

$$tg\,\varphi = tg\,\frac{\varphi_1+\varphi_0}{2}, \qquad \varphi = \frac{\varphi_1+\varphi_0}{2};$$

hiemit erhält man für den Maximalwert des Fehlers:

$$\frac{4\sin\dfrac{\varphi_1-\varphi_0}{2}}{\varphi_1-\varphi_0+\sin(\varphi_1-\varphi_0)} - 1 = \sqrt{a^2+b^2} - 1.$$

Liegt z. B. der Wert von $\frac{y}{x}$ zwischen 0 und 1, so schwankt φ von 0 bis $\frac{\pi}{4}$; es ist also: $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{4} = 45^0$, daher

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{4 \sin 22^0\,30' (x \cos 22^0\,30' + y \sin 22^0\,30')}{\frac{\pi}{4} + \sin 45^0} =$$

$$= \frac{2\, x \sin 45^0 + 4\, y \sin^2 22^0\,30'}{\frac{\pi}{4} + \sin 45^0}.$$

16. Prüfung gemachter Hypothesen.

Es sei die Funktion $V = F(A, B, C, \ldots\ldots, x, y, z, \ldots\ldots)$ ihrer analytischen Form nach gegeben; $x, y, z, \ldots\ldots$ bedeuten die Parameter und $A, B, C, \ldots\ldots$ sind die in dem Ausdrucke der Funktion vorkommenden, aber noch unbekannten Konstanten. Die Werte von V, welche beliebigen Werten der Parameter $x, y, z, \ldots\ldots$ zugehören, sind einer Beobachtung durch Messen, Wägen etc. fähig. Die Anzahl der Beobachtungen übertrifft die Anzahl der in der Funktion vorkommenden Konstanten. Den Werten $x_i, y_i, z_i, \ldots\ldots$ entspricht l_i als beobachteter Wert von V. Sind unter diesen Voraussetzungen $a, b, c, \ldots\ldots$ die vorteilhaftesten Werte der unbekannten Konstanten $A, B, C, \ldots\ldots$, so gestattet die Formel $v = F(a, b, c, \ldots\ldots, x, y, z, \ldots\ldots)$ zu jeder Wertgruppe $x, y, z, \ldots\ldots$ den zugehörigen Wert von v zu berechnen und das Beobachtungsmaterial genügt in seiner Gänze dieser Formel möglichst genau.

Unter den aus den Gebieten der Naturwissenschaften und der Technik stammenden Aufgaben, welche vorzugsweise geeignet sind, nach der Vorschrift der Methode der kleinsten Quadrate behandelt zu werden, kommt nicht selten der Fall vor, daß die Gestalt der Funktion F, deren Kenntnis zur Begründung der ganzen Rechnung gefordert werden muß, entweder gar nicht bekannt ist oder nur nach ganz allgemeinen Eigenschaften, die jedoch zur vollständigen Herstellung derselben nicht ausreichen. Man pflegt in einem solchen Falle die Funktion F als eine ganze rationale Funktion der unabhängigen Veränderlichen vorauszusetzen, in welcher jedes Glied eine unbekannte Konstante zum Koeffizienten hat; speziell, wenn nur eine unabhängige Veränderliche vorliegt, pflegt man sonach die Funktion als einen nach den steigenden Potenzen dieser Veränderlichen geordneten Ausdruck, also in der Form

$$F = a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3 + \cdots\cdots$$

darzustellen. Die Frage, wie viel Glieder man diesem Ausdrucke der Funktion geben müsse, damit derselbe eine gegebene Reihe von beobachteten Werten mit hinreichender Genauigkeit darstelle, läßt sich mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate beantworten.

Jeder Beobachter erlangt nämlich während der Beobachtungen ein ziemlich sicheres Urteil über die Größe des wahrscheinlichen Fehlers dieser Beobachtungen, d. h. desjenigen Fehlers, welchen er bei den in Rede stehenden Beobachtungen ebenso leicht überschreitet wie nicht erreicht. Mit anderen Worten, er wird mit großer Zuverlässigkeit eine Grenze anzugeben imstande sein, über welche der wahrscheinliche Fehler dieser Beobachtungen keinesfalls hinausgehen kann. Wenn man nun unter der Voraussetzung, daß die Gestalt der Funktion F unbekannt sei, für F einen ganzen rationalen Ausdruck mit einer bestimmten Anzahl von Gliedern setzt, und, nach der Berechnung der wahrscheinlichsten Werte der unbekannten Koeffizienten dieser Glieder, zur Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers r der Beobachtungen sowie der wahrscheinlichen Grenzen dieses wahrscheinlichen Fehlers übergeht, so kann der Erfolg ein zweifacher sein:

a) Der berechnete Wert von r überschreitet die im voraus festgestellte Grenze. In diesem Falle sind die Differenzen zwischen den beobachteten und den berechneten Funktionswerten größer als die mutmaßlichen Beobachtungsfehler; die gewählte Form der Funktion F stellt also die gegebenen Beobachtungen in stärkerem Maße ungenau dar, als es durch den Einfluß der Beobachtungsfehler allein hätte geschehen können, und man wird darin die Weisung erkennen, dem Ausdrucke der Funktion F noch mindestens das Glied der nächstfolgenden Ordnung hinzuzufügen oder sogar eine ganz andere Form zu geben.

b) Der berechnete Wert von r fällt innerhalb der im voraus festgestellten Grenze. In diesem Falle sind die Fehler, welche durch den Einfluß der unrichtig gewählten Form der Funktion F entstanden sein können, von einerlei Ordnung mit den Beobachtungsfehlern, und fließen mit diesen zusammen, so daß der gefundene Ausdruck für F die gegebenen Beobachtungen so genau darstellt, als es überhaupt durch eine algebraische Funktion möglich ist. Man kann also in dem letzten Falle den erhaltenen Ausdruck der Funktion F für den weiteren Gebrauch beibehalten, wobei es von Wichtigkeit ist, zu beachten, daß die Anwendung dieses Ausdruckes niemals über die Grenzen derjenigen Beobachtungen ausgedehnt werden darf, auf denen seine Entstehung beruht.

So wurde in einem hier nicht näher zu erörternden Beispiele, wo 27 Beobachtungen einer Funktion F vorlagen, welche nur an die beiden Bedingungen $F(0) = 0$ und $F(-x) = F(x)$ gebunden war, zuerst $F = a x^2$ gesetzt. Der daraus sich ergebende Wert des wahrscheinlichen Fehlers der Beobachtungen fiel indessen so groß aus, daß der Beobachter sicher war, einen so großen Beobachtungsfehler nur in seltenen Fällen begangen zu haben. Deshalb wurde $F = a x^2 + b x^4$ gesetzt, wodurch der wahrscheinliche Fehler auf die gewünschte Kleinheit gebracht wurde. Dieser letzte Ausdruck konnte deshalb, innerhalb der Grenzen der ihm zu Grunde liegenden Beobachtungen, als hinreichend genauer Ausdruck der unbekannten Funktion beibehalten werden.

Ein noch genaueres Kriterium in Betreff der angemessenen Wahl der Form der Funktion ergibt sich, wenn man mit Hilfe des berechneten Wertes von r, welcher im allgemeinen der unter *b)* angeführten Forderung schon Genüge leistet, nach der Tabelle II die Verteilung der Beobachtungsfehler in Bezug auf ihre Größe untersucht und mit den durch die Rechnung gefundenen Werten der Beobachtungsfehler vergleicht. Je mehr hier Übereinstimmung herrscht, desto sicherer ist man, daß der Einfluß der unrichtig gewählten Form von F auf die Differenzen zwischen den beobachteten und den berechneten Funktionswerten verschwindend sein muß im Vergleiche mit den Fehlern der Beobachtung; desto näher werden mithin jene Differenzen mit den eigentlichen Beobachtungsfehlern identisch sein.

Dieses letzte Prüfungsmittel wird man übrigens auch in denjenigen Fällen anwenden, wo die Gestalt der Funktion F gegeben ist. Je größer die Anzahl der gegebenen Beobachtungen war, desto mehr muß die Verteilung der berechneten Werte der Beobachtungsfehler in Bezug auf ihre Größe mit derjenigen Verteilung der Beobachtungswerte übereinstimmen, welche die Tabelle II darstellt. Wo dies eintritt, da erhält man den Beweis, daß die Rechnung auf richtigen Voraussetzungen beruht und daß namentlich die Natur der Aufgabe keine fremden Elemente in die Betrachtung eingestreut hat, welche die Grundlagen der Methode der kleinsten Quadrate und insbesondere die Bestimmungen über die Natur der Beobachtungsfehler für den besonderen Fall hätten unzulässig machen können.

VI. Abschnitt.

Bedingte Beobachtungen.

1. Problemstellung.

Bedingte Beobachtungen zurückgeführt auf vermittelnde Beobachtungen (indirekte Lösung des Problems).

Für die Größen $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ seien durch Beobachtung die Werte $l_1, l_2, \ldots\ldots, l_n$ erhalten worden. Sind jene Größen unabhängig voneinander, so kann die Behandlung wie im Falle vermittelnder Beobachtungen auf folgende Art erfolgen: Es ist die Größe

$$V = A_1 X_1 + A_2 X_2 + \cdots\cdots + A_n X_n$$

n-mal beobachtet worden, und den einzelnen Beobachtungen entsprechen die nachstehenden Wertgruppen für V und für die Parameter $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$:

$$\begin{array}{l} l_1;\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0, \\ l_2;\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_n;\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 1. \end{array}$$

Daraus ergibt sich das System der Fehlergleichungen:

$$\begin{array}{l} \lambda_1 = -l_1 + x_1 \\ \lambda_2 = -l_2 \qquad + x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_n = -l_n \qquad\qquad + x_n, \end{array}$$

aus dem wieder das System der Normalgleichungen

$$\begin{array}{l} x_1 = l_1, \\ x_2 = l_2, \\ \ldots\ldots \\ x_n = l_n \end{array}$$

hervorgeht, welches nur besagt, daß in diesem Falle der vorteilhafteste Wert einer jeden Unbekannten der durch die Beobachtung für sie erhaltene Wert sei. Die Summe $[\lambda\lambda]$ nimmt dabei den absolut kleinsten Wert, nämlich 0, an. Daraus ist aber nicht auf Fehlerfreiheit der Beobachtungen zu schließen; vielmehr ist, da sich keine Widersprüche ergeben können, kein Mittel zur Beurteilung der Genauigkeit vorhanden.

Anders gestaltet sich die Sache, wenn zwischen den Größen $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ Gleichungen bestehen, welche a priori gegeben sind. Dann muß den vorteilhaftesten Werten $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ die Bedingung auferlegt werden, daß auch sie jene Gleichungen erfüllen. Dies hat, da die rohen Beobachtungsergebnisse vermöge ihrer Fehlerhaftigkeit diese Bedingung nicht erfüllen werden, Gleichungen zwischen den Verbesserungen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n$ zur Folge, die an $l_1, l_2, \ldots\ldots, l_n$ angebracht werden müssen, um sie in $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ zu überführen.

Es seien

$$1)\quad \begin{cases} f_1(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n) = 0, \\ f_2(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_g(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n) = 0 \end{cases}$$

die Bedingungsgleichungen, welchen $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ zu genügen haben. Ihre Anzahl g ist notwendig kleiner als die Anzahl n der Unbekannten, weil letztere schon im Falle $g = n$ durch die Bedingungsgleichungen selbst bestimmt wären, ohne daß es hiezu einer Beobachtung bedürfte. Da nun auch die vorteilhaftesten Werte $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ die Bedingungungsgleichungen befriedigen müssen, so besteht das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) &= f_1(l_1 + \lambda_1, l_2 + \lambda_2, \ldots\ldots, l_n + \lambda_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) &= f_2(l_1 + \lambda_1, l_2 + \lambda_2, \ldots\ldots, l_n + \lambda_n) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_g(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) &= f_g(l_1 + \lambda_1, l_2 + \lambda_2, \ldots\ldots, l_n + \lambda_n) = 0. \end{aligned}$$

Entwickelt man die linken Seiten unter der Voraussetzung, daß $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_n$ sehr klein seien, und setzt dabei zur Abkürzung:

$$2)\quad \begin{cases} f_1(l_1, l_2, \ldots\ldots, l_n) = w_1, \\ f_2(l_1, l_2, \ldots\ldots, l_n) = w_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_g(l_1, l_2, \ldots\ldots, l_n) = w_g, \end{cases}$$

$$3)\quad \frac{\partial f_1}{\partial l_i} = a_i, \quad \frac{\partial f_2}{\partial l_i} = b_i, \ \ldots\ldots\ldots, \ \frac{\partial f_g}{\partial l_i} = g_i,$$

so entstehen die sogenannten abgeleiteten Bedingungsgleichungen:

$$4)\quad \left\{\begin{array}{l} a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \cdots\cdots + a_n\lambda_n + w_1 = 0, \\ b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \cdots\cdots + b_n\lambda_n + w_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_1\lambda_1 + g_2\lambda_2 + \cdots\cdots + g_n\lambda_n + w_g = 0, \end{array}\right\} \text{oder} \left\{\begin{array}{l} [a\lambda] + w_1 = 0, \\ [b\lambda] + w_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ [g\lambda] + w_g = 0. \end{array}\right.$$

Diese Form der Bedingungsgleichungen ist nur dann streng richtig, wenn die Gleichungen 1) linear sind; im andern Falle stellt sie, wie sofort gezeigt werden soll, nur eine Näherung dar, die um so zutreffender ist, je kleiner die Verbesserungen λ sind.

Durch die Substitution $l_1 + \lambda_1$, $l_2 + \lambda_2$, ..., $l_n + \lambda_n$ für X_1, X_2, ..., X_n verwandelt sich nämlich die erste der Gleichungen 1) in

$$f_1(l_1 + \lambda_1,\ l_2 + \lambda_2,\ \ldots\ldots,\ l_n + \lambda_n) = 0.$$

Da nun die gesuchten Verbesserungen λ_1, λ_2, ..., λ_n immer so klein vorausgesetzt werden, daß man die höheren Potenzen und Produkte derselben vernachlässigen kann, so hat man vermöge des Taylorschen Satzes:

$$f_1(l_1,\ l_2,\ \ldots\ldots,\ l_n) + \frac{\partial f_1}{\partial l_1}\lambda_1 + \frac{\partial f_1}{\partial l_2}\lambda_2 + \cdots\cdots + \frac{\partial f_1}{\partial l_n}\lambda_n = 0.$$

oder vermöge der mittels der Gleichungen 2) und 3) eingeführten Bezeichnungen für die bekannten Größen

$$w_1 + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \cdots\cdots + a_n\lambda_n = 0,$$

übereinstimmend mit der ersten der Gleichungen 4). In gleicher Weise wird jede nicht lineare Gleichung behandelt.

Die Größen w_1, w_2, ..., w_g bedeuten, wie aus ihren Definitionen 2) zu ersehen ist, die Widersprüche, welche sich ergeben, wenn man in die Bedingungsgleichungen 1) statt der wahren Werte die Beobachtungsergebnisse einsetzt, oder anders gesagt, die Größen w stellen die Widersprüche zwischen Beobachtung und Theorie dar.

Über das Vorzeichen dieser Größen w ist zu bemerken, daß dasselbe sich unter allen Umständen nach der Formel

$$\text{Widerspruch } w = \text{Beobachtung} - \text{Theorie}$$

oder

$$w = \text{Beobachtung} - \text{Sollbetrag}$$

bestimmt.

Die abgeleiteten Bedingungsgleichungen 4) gestatten, eine Anzahl g von den Verbesserungen λ, etwa λ_1, λ_2, ..., λ_g durch die übrigen linear auszudrücken. Ist beispielsweise $g = 4$ und $n = 7$, so erhält man, wenn

$$\lambda_5 = \xi_5,\quad \lambda_6 = \xi_6,\quad \lambda_7 = \xi_7$$

gesetzt wird, das Gleichungssystem:

$$5)\quad \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = -l_1 + \mathfrak{a}_1 \xi_5 + \mathfrak{b}_1 \xi_6 + \mathfrak{c}_1 \xi_7 \\ \lambda_2 = -l_2 + \mathfrak{a}_2 \xi_5 + \mathfrak{b}_2 \xi_6 + \mathfrak{c}_1 \xi_7 \\ \lambda_3 = -l_3 + \mathfrak{a}_3 \xi_5 + \mathfrak{b}_3 \xi_6 + \mathfrak{c}_3 \xi_7 \\ \lambda_4 = -l_4 + \mathfrak{a}_4 \xi_5 + \mathfrak{b}_4 \xi_6 + \mathfrak{c}_3 \xi_7 \\ \lambda_5 = \qquad\qquad \xi_5 \\ \lambda_6 = \qquad\qquad\qquad\quad \xi_6 \\ \lambda_7 = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \xi_7 \end{array}\right.$$

Das ist aber ein System von Fehlergleichungen, wie es bei vermittelnden Beobachtungen vorlag. Hat man auf Grund des Prinzips: „$[\lambda\lambda]$ ein Minimum" die vorteilhaftesten Werte von ξ_5, ξ_6, ξ_7 berechnet und mittels derselben $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_7$ bestimmt, so sind auch $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_7$ gefunden.

Es ist demnach die Ausgleichung von n Beobachtungen mit g Bedingungsgleichungen zurückführbar auf die Ausgleichung von n vermittelnden Beobachtungen mit $n-g$ Unbekannten.

Ob diese in allgemeinen Gleichungen angedeutete Reduktion auf vermittelnde Beobachtungen nützlich ist, kommt auf den einzelnen Fall an. Wenn die Bedingungsgleichungen einfacher Natur sind und ihre Anzahl nicht groß ist, wird dieses Verfahren, die indirekte Lösung der Aufgabe bedingte Beobachtungen auszugleichen, zu empfehlen sein.

Im Falle ungleich genauer Beobachtungen muß die Summe der mit den Gewichten multiplizierten Quadrate der Verbesserungen, d. i. $[p\lambda\lambda]$ ein Minimum werden.

Das bisher Gesagte soll zum besseren Verständnisse auf den speziellen Fall von linearen Bedingungsgleichungen übertragen werden.

Es seien n unbekannte Größen $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ zu bestimmen und man habe hiefür die gleich genauen Beobachtungen $l_1, l_2, \ldots\ldots, l_n$ gemacht. Zwischen den wahrscheinlichsten Werten x der Unbekannten X mögen folgende streng zu erfüllende lineare Bedingungsgleichungen in der Anzahl g bestehen:

$$6)\quad \left\{\begin{array}{l} a_0 + \underbrace{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots\cdots + a_n x_n}_{} = 0, \\ b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots\cdots + b_n x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_0 + \underbrace{g_1 x_1 + g_2 x_2 + \cdots\cdots + g_n x_n}_{\text{Anzahl } n} = 0. \end{array}\right\} \text{Anzahl } g$$

Setzt man anstatt der wahrscheinlichsten Werte x die Beobachtungswerte l, so werden die Gleichungen 6) nicht mehr befriedigt, sondern ergeben:

$$7) \quad \left.\begin{cases} a_0 + a_1 l_1 + a_2 l_2 + \cdots\cdots + a_n l_n = w_1, \\ b_0 + b_1 l_1 + b_2 l_2 + \cdots\cdots + b_n l_n = w_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_0 + g_1 l_1 + g_2 l_2 + \cdots\cdots + g_n l_n = w_g. \end{cases}\right\} \text{Anzahl } g$$

Damit die Widersprüche w verschwinden, sind an den Beobachtungswerten l Verbesserungen λ anzubringen. Dadurch geht beispielsweise die erste Gleichung des Systems 7) über in:

$$a_0 + a_1 (l_1 + \lambda_1) + a_2 (l_2 + \lambda_2) + \cdots\cdots + a_n (l_n + \lambda_n) = 0;$$

subtrahiert man hievon die erste Gleichung des Systems 7), so erhält man die abgeleitete Bedingungsgleichung:

$$a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + \cdots\cdots + a_n \lambda_n + w_1 = 0.$$

Zwischen allen Verbesserungen λ besteht also das folgende System der abgeleiteten Bedingungsgleichungen:

$$8) \quad \left.\begin{cases} a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + \cdots\cdots + a_n \lambda_n + w_1 = 0, \\ b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 + \cdots\cdots + b_n \lambda_n + w_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \underbrace{g_1 \lambda_1 + g_2 \lambda_2 + \cdots\cdots + g_n \lambda_n}_{\text{Anzahl } n} + w_n = 0. \end{cases}\right\} \text{Anzahl } g$$

Hiezu hat man noch die Ausgleichungsbedingung:

$[\lambda\lambda]$ ein Minimum.

Für die Anzahl n der Unbekannten und die Anzahl g der Bedingungsgleichungen ist es wesentlich, daß $n > g$ sei, denn es soll nicht möglich sein, die Verbesserungen λ schon aus den Gleichungen 8) zu bestimmen.

Um die Ausgleichung auf vermittelnde Beobachtungen zurückzuführen, drückt man mit Hilfe der Bedingungsgleichungen 8) g beliebig gewählte λ durch die übrigen $n - g$ aus. Hiedurch möge erhalten werden:

$$9) \quad \left.\begin{cases} \lambda_1 = - l_1 + \mathfrak{a}_1 \xi_{g+1} + \mathfrak{b}_1 \xi_{g+2} + \cdots\cdots + \mathfrak{h}_1 \xi_n, \\ \lambda_2 = - l_2 + \mathfrak{a}_2 \xi_{g+1} + \mathfrak{b}_2 \xi_{g+2} + \cdots\cdots + \mathfrak{h}_2 \xi_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_g = - l_g + \underbrace{\mathfrak{a}_g \xi_{g+1} + \mathfrak{b}_g \xi_{g+2} + \cdots\cdots + \mathfrak{h}_g \xi_n}_{\text{Anzahl } n-g}. \end{cases}\right\} \text{Anzahl } g$$

Die als unabhängig ausgewählten $\lambda_{g+1}, \lambda_{g+2}, \ldots\ldots, \lambda_n$ drücke man durch das Schema aus:

$$10)\quad \left\{\begin{array}{llll} \lambda_{g+1} = \xi_{g+1} & & & \\ \lambda_{g+2} = & \xi_{g+2} & & \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \lambda_n \;= & & & \xi_n \end{array}\right\} \text{Anzahl } n-g$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{Anzahl } n-g}$$

Nun stellen 9) und 10) zusammen ein System von $g + (n - g) = n$ Fehlergleichungen mit $n - g$ unabhängigen Unbekannten $\lambda_{g+1}, \lambda_{g+2}, \ldots\ldots, \lambda_n$ vor, sonach ist wieder die Aufgabe der Ausgleichung von n Beobachtungen mit g Bedingungsgleichungen zurückgeführt auf die Ausgleichung von n vermittelnden Beobachtungen mit $n - g$ Unbekannten.

Resumé. Die beobachteten Werte der Unbekannten werden, weil mit unvermeidlichen Fehlern behaftet, den zwischen denselben bestehenden Bedingungsgleichungen nicht Genüge leisten, und müssen demnach Verbesserungen erhalten, welche so beschaffen sind, daß die verbesserten Werte die Bedingungsgleichungen strenge erfüllen. Dies kann aber immer auf unendlich vielfache Art geschehen und es wird daher darauf ankommen, unter allen möglichen Systemen von Verbesserungen das vorteilhafteste zu finden. Offenbar sind die gesuchten Verbesserungen, mit entgegengesetzten Zeichen genommen, als die Fehler der Beobachtungen zu betrachten, und es kann daher die Aufgabe folgendermaßen ausgesprochen werden: Es sind die beobachteten Werte der Unbekannten so zu verbessern, daß *a)* die verbesserten Werte die Bedingungsgleichungen streng befriedigen, und *b)* die Summe der Quadrate der Verbesserungen, multipliziert in ihre respektiven Gewichte, ein Minimum wird.

2. Beispiele.

1. Beispiel. Ausgleichung der gemessenen Winkel eines ebenen Dreieckes.

Die drei Winkel X_1, X_2, X_3 eines ebenen Dreieckes*) müssen bekanntlich der Bedingung genügen

$$X_1 + X_2 + X_3 - 180^0 = 0.$$

*) Bei mäßiger Länge der Seiten können die Dreiecke auf der Erdoberfläche als ebene Dreiecke angesehen werden.

Man habe durch Messungen von gleicher Genauigkeit für diese drei Winkel beziehungsweise die Werte l_1, l_2, l_3 gefunden, deren Summe von 180° verschieden ausgefallen ist. Man fragt nach den wahrscheinlichsten Werten x_1, x_2, x_3 dieser Winkel. Die beobachteten Winkelwerte l_1, l_2, l_3 müssen, weil mit unvermeidlichen Fehlern behaftet, Verbesserungen λ_1, λ_2, λ_3 erhalten, welche so beschaffen sind, daß die verbesserten Winkelwerte

$$x_1 = l_1 + \lambda_1, \quad x_2 = l_2 + \lambda_2, \quad x_3 = l_3 + \lambda_3$$

auch die Bedingung

1) $$x_1 + x_2 + x_3 - 180 = 0$$

erfüllen; überdies muß die Summe der Quadrate der Verbesserungen ein Minimum sein. Da vermöge der Bedingungsgleichung 1)

$$x_3 = 180 - x_1 - x_2$$

ist, hat man nur die wahrscheinlichsten Werte der zwei Winkel x_1 und x_2 zu bestimmen.

Das System der Fehlergleichungen lautet:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= - l_1 + x_1, \\ \lambda_2 &= - l_2 + x_2, \\ \lambda_3 &= - l_3 + 180 - x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Die Forderung $[\lambda\lambda]$ ein Minimum führt zu den Bedingungsgleichungen

$$\frac{1}{2}\frac{\partial[\lambda\lambda]}{\partial x_1} = - l_1 + x_1 - (- l_3 + 180 - x_1 - x_2) = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial[\lambda\lambda]}{\partial x_2} = - l_2 + x_2 - (- l_3 + 180 - x_1 - x_2) = 0;$$

aus denselben folgt:

$$- l_1 + x_1 = - l_2 + x_2 = - l_3 + x_3.$$

Mit Zuziehung der Gleichung 1) erhält man hieraus endlich:

2) $$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= l_1 + \frac{180 - l_1 - l_2 - l_3}{3}, \\ x_2 &= l_2 + \frac{180 - l_1 - l_2 - l_3}{3}, \\ x_3 &= l_3 + \frac{180 - l_1 - l_2 - l_3}{3}, \end{aligned} \right.$$

d. h. die Abweichung der Summe der beobachteten Werte l_1, l_2, l_3 von 180° muß **auf alle Winkel zu gleichen Teilen** verteilt werden. Die Sicherheit der Messung eines Winkels ist sonach im allgemeinen

von der Größe des Winkels unabhängig; die Verhältnisse sind hier also wesentlich verschieden von jenen bei Längenmessungen, bei denen der Fehler mit der Länge zunimmt (siehe die Anmerkung 2 zu diesem Punkte).

Genau dasselbe Verfahren findet auch Anwendung, wenn man die sämtlichen Winkel eines ebenen Polygons gemessen hat. Hat dieses n Seiten, so beträgt die Summe aller Winkel $(n-2)\,180^0$. Ergibt die Messung dafür einen um w abweichenden Betrag, so wird unter der Voraussetzung gleicher Schärfe in allen Messungen die wahrscheinlichste Verbesserung dadurch eingeführt, daß man jedem Winkel $\frac{1}{n}w$ hinzufügt und zwar mit positivem Vorzeichen, wenn die Winkelsumme des Polygons um w zu klein, mit negativem Vorzeichen, wenn diese Winkelsumme um w zu groß erhalten wurde.

Die drei Winkel eines ebenen Dreiecks sind gemessen mit:

$$l_1 = 36^0\,25'\,47'', \quad l_2 = 90^0\,36'\,28'', \quad l_3 = 52^0\,57'\,57'';$$

es ist also:

$$l_1 + l_2 + l_3 = 180^0\,0'\,12'' \quad \text{und} \quad w = 12''.$$

Die wahrscheinlichsten Werte x_1, x_2, x_3 der Dreieckswinkel oder die ausgeglichenen Dreieckswinkel betragen hienach, gleiche Schärfe der Messungen vorausgesetzt:

$$x_1 = l_1 - \frac{w}{3} = 36^0\,25'\,43'',$$

$$x_2 = l_2 - \frac{w}{3} = 90^0\,36'\,24'',$$

$$x_3 = l_3 - \frac{w}{3} = 52^0\,57'\,53''$$

und ergeben die durch die Theorie geforderte Summe.

Es kann indessen leicht geschehen, daß ein Dreieckswinkel infolge äußerer Umstände mit bedeutend größerer beziehungsweise geringerer Genauigkeit als die beiden andern bestimmt wurde. Dies wäre z. B. der Fall, wenn man von einem Punkte aus sehr nahe gegen die Sonne visieren mußte und deshalb das Fernrohr oder die Alhidade nicht so scharf einstellen konnte. Man muß alsdann die Größe des betreffenden mittleren oder des wahrscheinlichen Fehlers vergleichungsweise gegen die der übrigen schätzen. Wenn also beispielsweise die Genauigkeit in der Bestimmung des Winkels l_1 nur

halb so groß, somit der mittlere oder der wahrscheinliche Fehler doppelt so groß erscheint wie bei l_2 und l_3, so darf man annehmen, daß die Verbesserungen, welche die erforderliche Ergänzung der Summe zu 180° darstellen sollen, in demselben Verhältnisse stehen. Bezeichnet man die Verbesserungen für l_2 und l_3 mit λ, so hat man alsdann:

$$(l_1 + 2\lambda) + (l_2 + \lambda) + (l_3 + \lambda) = 180^0. \quad \text{Daher ist } 4\lambda = w,$$

woraus $\lambda = \frac{w}{4}$ folgt; hiebei bedeutet wieder w die Abweichung der Summe der drei gemessenen Winkel von 180°. Der Winkel l_1 wäre also um $\frac{1}{2}w$ und die beiden andern um $\frac{1}{4}w$ zu ändern.

2. Beispiel. Horizontabschluß. Es seien die Winkel zwischen den um einen Punkt A im Horizonte liegenden vier Objekten 1, 2, 3 und 4 gemessen worden; hiebei wurde erhalten:

$$\begin{aligned}
(1.2) &= l_1 = 75^0\,28'\,26{\cdot}37'', && \text{Gewicht } p_1 = 2,\\
(2.3) &= l_2 = 112\;\;15\;\;54{\cdot}03\;\;, && \text{Gewicht } p_2 = 4,\\
(3.4) &= l_3 = 101\;\;42\;\;13{\cdot}94\;\;, && \text{Gewicht } p_3 = 4,\\
(4.1) &= l_4 = 70\;\;33\;\;28{\cdot}15\;\;, && \text{Gewicht } p_4 = 1.
\end{aligned}$$

Man hat hier vier Unbekannte, welche der Bedingung unterworfen sind, daß ihre Summe $= 360^0$ sein muß, denn die Summe der Winkel um einen Punkt herum muß 360° ergeben. Die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten seien x_1, x_2, x_3, x_4. Nimmt man zur Vereinfachung der Rechnung für diese unbekannten Winkel die Näherungswerte l_1', l_2', l_3', l_4' an, und setzt, mit $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ die gesuchten wahrscheinlichsten Verbesserungen dieser Näherungswerte bezeichnend,

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= l_1' + \xi_1 = 75^0\,28'\,26'' + \xi_1,\\
x_2 &= l_2' + \xi_2 = 112\;\;15\;\;54\;\; + \xi_2,\\
x_3 &= l_3' + \xi_3 = 101\;\;42\;\;14\;\; + \xi_3,\\
x_4 &= l_4' + \xi_4 = 70\;\;33\;\;28\;\; + \xi_4,
\end{aligned}\right\}\begin{gathered}\text{wobei}\\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 360^0\\ \text{ist,}\end{gathered}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 360^0 = 360^0\;0'\;2'' + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4,$$

so ergibt sich die abgeleitete Bedingungsgleichung

$$1) \qquad \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + 2'' = 0.$$

Wenn keine Bedingungsgleichung vorliegen würde, so müßte $l_i' + \xi_i - l_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, sein, also das System der Gleichungen bestehen:

$$2) \qquad \left\{\begin{aligned}
\xi_1 - 0{\cdot}37'' &= 0,\\
\xi_2 - 0{\cdot}03'' &= 0,\\
\xi_3 + 0{\cdot}06'' &= 0,\\
\xi_4 - 0{\cdot}15'' &= 0.
\end{aligned}\right.$$

Es wären sonach

3) $\xi_1 = 0{\cdot}37''$, $\xi_2 = 0{\cdot}03''$, $\xi_3 = -0{\cdot}06''$, $\xi_4 = 0{\cdot}15''$

schon die wahrscheinlichsten Werte der Verbesserungen. Wenn aber die Beobachtungswerte die Bedingungsgleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 360^0 = 0$$

nicht erfüllen, so werden die wahrscheinlichsten Werte von ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 nicht mehr die durch die Gleichungen 3) angegebenen Werte erhalten, sondern müssen so bestimmt werden, daß auch die Gleichung 1) erfüllt wird.

Man hat hier 4 Unbekannte, zwischen welchen 1 Bedingungsgleichung besteht. Mit Hilfe der letzteren eliminiere man nun eine Unbekannte, etwa $\xi_4 = -2 - \xi_1 - \xi_2 - \xi_3$, wodurch sich zwischen den drei übrigen unabhängigen Unbekannten folgende 4 Fehlergleichungen ergeben:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \xi_1 - 0{\cdot}37, & \text{Gewicht } p_1 &= 2, \\ \lambda_2 &= \xi_2 - 0{\cdot}03, & \text{Gewicht } p_2 &= 4, \\ \lambda_3 &= \xi_3 + 0{\cdot}06, & \text{Gewicht } p_3 &= 4, \\ \lambda_4 &= -\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 - 2{\cdot}15, & \text{Gewicht } p_4 &= 1. \end{aligned}$$

Die allgemeine Form dieser Fehlergleichungen ist:

$$\lambda_i = a_i \xi_1 + b_i \xi_2 + c_i \xi_3 - m_i, \quad \text{Gewicht} = p_i.$$

Um sie für die Beobachtung vom Gewicht eins umzuwandeln, hat man dieselbe bekanntlich (Punkt 7 des V. Abschnittes) mit $\sqrt{p_i}$ zu multiplizieren und erhält:

$$\lambda_i \sqrt{p_i} = a_i \sqrt{p_i}\, \xi_1 + b_i \sqrt{p_i}\, \xi_2 + c_i \sqrt{p_i}\, \xi_3 - m_i \sqrt{p_i}$$

oder

$$\lambda_i \sqrt{p_i} = a_i' \lambda_1 + b_i' \lambda_2 + c_i' \lambda_3 + m_i'.$$

Die Ausgleichung gibt nun anstatt „$[\lambda\lambda]$ ein Minimum" für die Summe $[p\lambda\lambda]$ ein Minimum.

Es ist sonach

$$\begin{aligned} a_1' &= \sqrt{2}, & b_1' &= 0, & c_1' &= 0, & m_1' &= -0{\cdot}37\sqrt{2}, \\ a_2' &= 0, & b_2' &= \sqrt{4}, & c_2' &= 0, & m_2' &= -0{\cdot}03\sqrt{4}, \\ a_3' &= 0, & b_3' &= 0, & c_3' &= \sqrt{4}, & m_3' &= +0{\cdot}06\sqrt{4}, \\ a_4' &= -1, & b_4' &= -1, & c_4' &= -1, & m_4' &= -2{\cdot}15; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [a'a'] &= 3, & [a'b'] &= 1, & [a'c'] &= 1, & [a'm'] &= 1{\cdot}41, \\ [a'b'] &= 1, & [b'b'] &= 5, & [b'c'] &= 1, & [b'm'] &= 2{\cdot}03, \\ [a'c'] &= 1, & [b'c'] &= 1, & [c'c'] &= 5, & [c'm'] &= 2{\cdot}39. \end{aligned}$$

Die Normalgleichungen lauten daher:

$$\begin{aligned} 3\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + 1\cdot41 &= 0, \\ \xi_1 + 5\xi_2 + \xi_3 + 2\cdot03 &= 0, \\ \xi_1 + \xi_2 + 5\xi_3 + 2\cdot39 &= 0; \end{aligned}$$

hieraus erhält man für die wahrscheinlichsten Werte der Verbesserungen

$$\xi_1 = -0\cdot253'', \quad \xi_2 = -0\cdot281'', \quad \xi_3 = -0\cdot371''.$$

Mit diesen Werten ergibt sich aus der Bedingungsgleichung 1) der Wert $\xi_4 = -1\cdot095''$. Die wahrscheinlichsten Werte der vier Winkel sind also:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1' + \xi_1 = 75^0\,28'\,25\cdot747'' \\ x_2 &= l_2' + \xi_2 = 112\;\;15\;\;53\cdot719 \\ x_3 &= l_3' + \xi_3 = 101\;\;42\;\;13\cdot629 \\ x_4 &= l_4' + \xi_4 = 70\;\;33\;\;26\cdot905 \\ \hline \text{Summe} &= 360^0\;\;0'\;\;0\cdot000''. \end{aligned}$$

Anmerkung 1. Bei einem sphärischen Dreiecke (Kugeldreiecke) ist bekanntlich die Summe aller drei Winkel größer als 180^0 und kleiner als 540^0. Sind X_1, X_2, X_3 die Winkel eines sphärischen Dreieckes in Graden, so heißt die stets positive Differenz $X_1 + X_2 + X_3 - 180^0$, d. h. der Überschuß der Winkelsumme über 180^0, der sphärische Exzeß des Dreieckes. Bezeichnet man ihn mit e^0, so hat man für die Summe der drei Winkel eines sphärischen Dreieckes den Ausdruck $180^0 + e^0$. Bedeutet f den Flächeninhalt eines sphärischen Dreieckes und r den Kugelhalbmesser, so hat man bekanntlich

$$f = r^2 \pi \frac{X_1 + X_2 + X_3 - 180^0}{180^0} = \frac{e^0}{180^0} \pi r^2 = 0\cdot0174533\, e^0 r^2.$$

Anmerkung 2. Die bei Längenmessungen mit Ketten und Stäben auftretenden Fehler sind teils unregelmäßig, gleich wahrscheinlich positiv und negativ, teils regelmäßig oder einseitig wirkend.

Für die folgende Betrachtung sei nur das Auftreten von unregelmäßigen Fehlern vorausgesetzt.

Eine Länge L werde durch n-maliges Aneinanderreihen der Maßstablänge l erhalten; es ist also

$$1) \qquad L = l + l + l + \cdots\cdots + l = n\,l.$$

Jede Maßstabanlage habe den mittleren Fehler μ, dann ergibt sich nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetze für den mittleren Fehler μ_L der gemessenen Strecke L:

2) $\mu_L = \sqrt{\mu^2 + \mu^2 + \mu^2 + \cdots\cdots + \mu^2} = \sqrt{n\mu^2} = \mu\sqrt{n},$

oder weil $n = \frac{L}{l}$ ist:

3) $$\mu_L = \mu\sqrt{\frac{L}{l}} = \frac{\mu}{\sqrt{l}}\sqrt{L}.$$

Hierin sind μ und l konstant, d. h. unabhängig von L. Aus $\frac{\mu_L}{\sqrt{L}} = \frac{\mu}{\sqrt{l}}$ erkennt man, daß der Quotient $\frac{\mu}{\sqrt{l}}$ den mittleren Fehler für die Längeneinheit bedeutet. Bezeichnet man denselben mit μ_1, setzt also $\frac{\mu}{\sqrt{l}} = \mu_1$, so übergeht 3) in $\mu_L = \mu_1\sqrt{L}$. Man hat also den wichtigen Satz: **Wird nur das Auftreten zufälliger Fehler vorausgesetzt, so wächst der mittlere Fehler der Längenmessung proportional der Quadratwurzel der Länge (Quadratwurzelgesetz für die direkte Längenmessung).**

Um nun die Genauigkeit irgend welcher Längenmessungsart zahlenmäßig zu bestimmen, könnte man etwa eine Länge L wiederholt mit demselben Längenmesser messen, den mittleren Fehler μ_L einer einzelnen Messung von der Länge L ableiten und hieraus gemäß der Formel $\frac{\mu_L}{\sqrt{L}}$ auch den mittleren Fehler der Längeneinheit finden.

Ein Zahlenbeispiel wird dies klar machen; hiebei soll der wahrscheinliche Fehler als Genauigkeitsmaß angewendet werden. Man habe zehnmal nacheinander dieselbe Strecke mit einer 20 *m* langen Kette gemessen und die gefundenen Maße, wie die nachstehende Tabelle ersehen läßt, bis auf 1 *cm* abgelesen.

Nr.	Gemessene Länge in Metern	λ	$\lambda\lambda$
1	92·65	— 0·14	0·020
2	92·47	+ 0·04	0·002
3	92·55	— 0·04	0·002
4	92·31	+ 0·20	0·040
5	92·43	+ 0·08	0·006
6	93·01	— 0·50	0·250
7	92·52	— 0·01	0·000
8	92·49	+ 0·02	0·000
9	92·29	+ 0·22	0·048
10	92·38	+ 0·13	0·017

Die wahrscheinlichste Länge der Strecke ergibt sich aus dem arithmetischen Mittel der gemessenen Längen und man findet hiefür 92·51 *m*; ferner ist $[\lambda\lambda] = 0{\cdot}385$. Der wahrscheinliche Fehler der Messung der ganzen 92·51 *m* langen Strecke hat somit die Größe:

$$r = 0{\cdot}67449 \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{10-1}} = 0{\cdot}67449 \sqrt{0{\cdot}0428} = 0{\cdot}67449 \times 0{\cdot}207 = 0{\cdot}139\, m.$$

Der wahrscheinliche Fehler für die Länge eines Meters wird erhalten, wenn man jenen für die ganze Strecke durch $\sqrt{92{\cdot}51} = 9{\cdot}62$ dividiert; er ist daher gleich 0·0145 *m*; der wahrscheinliche Fehler für eine Kettenlänge oder 20 *m* beträgt somit $0{\cdot}0145 \sqrt{20} = 0{\cdot}0648\, m$.

3. Maxima und Minima von Funktionen mehrerer abhängigen Variablen (Maxima und Minima bei Angabe von Nebenbedingungen).

Ehe zur zweiten, direkten und wichtigeren Behandlung bedingter Beobachtungen geschritten werden soll, möge die nachstehende Einschaltung aus der Differentialrechnung gemacht werden. Diese Einschaltung betrifft die Bestimmung der extremen Werte von Funktionen mehrerer abhängigen Variablen oder die Bestimmung der relativen (bedingten) Extreme. Für die direkte Behandlung bedingter Beobachtungen ist die Kenntnis dieser Theorie unerläßlich.

Häufig tritt der Fall ein, daß die veränderlichen Größen $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$, von welchen die Funktion

$$1) \qquad y = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n),$$

welche ein Extrem werden soll, abhängt, an gewisse Bedingungen gebunden sind, welche durch die Gleichungen

$$2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_g(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0 \end{array} \right\} \text{Anzahl } g$$

ausgedrückt sind. In diesem Falle sind die Variablen voneinander abhängig und die Aufgabe besteht darin, solche Werte der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ auszumitteln, welche die Funktion y zu einem Extrem machen und gleichzeitig die Bedingungsgleichungen 2) befriedigen.

Zur Auffindung dieser Werte bietet sich zunächst folgender Weg dar: Ist n die Anzahl der Veränderlichen und g jene der Be-

dingungsgleichungen, wobei g notwendig kleiner sein muß als n, so kann man mit Hilfe dieser Bedingungsgleichungen g Variable aus $y = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ eliminieren, indem man sie durch die übrigen $n - g$ Veränderlichen ausdrückt. Diese Funktion wird dann nur mehr $n - g$ voneinander unabhängige Veränderliche enthalten und kann nach den Vorschriften zur Bestimmung absoluter Extreme behandelt werden.

Dieses Verfahren ist aber nur selten das kürzeste und häufig wegen der Unmöglichkeit, die erforderlichen Eliminationen zu bewerkstelligen, unausführbar. Es soll daher noch ein anderer Weg zur Lösung des vorliegenden Problems gezeigt werden.

Damit die Funktion $f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ ein Extrem werde, muß zunächst die Gleichung

$$3)\quad dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots\cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0$$

erfüllt werden. Aus dieser Gleichung würde sogleich

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ldots\ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

folgen, wenn die Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ und somit auch deren Differentiale voneinander unabhängig wären; dies ist aber nicht der Fall. Durch Differentiation der Bedingungsgleichungen 2) erhält man:

$$4)\quad \left\{ \begin{aligned} d\varphi_1 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} dx_2 + \cdots\cdots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} dx_n = 0, \\ d\varphi_2 &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} dx_2 + \cdots\cdots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} dx_n = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d\varphi_g &= \frac{\partial \varphi_g}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_g}{\partial x_2} dx_2 + \cdots\cdots + \frac{\partial \varphi_g}{\partial x_n} dx_n = 0 \end{aligned} \right.$$

und kann nun mit Hilfe dieser Gleichungen, g an der Zahl, ebensoviele Differentiale aus der Gleichung 3) eliminieren. Die übrigbleibenden $n - g$ Differentiale sind nunmehr voneinander unabhängig, und indem man die Koeffizienten derselben gleich Null setzt, erhält man $n - g$ Gleichungen, welche in Verbindung mit den gegebenen g Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der n Unbekannten hinreichen. Dieses Verfahren erfordert, wie man sieht, nur Eliminationen aus linearen Gleichungen und ist demnach immer ausführbar.

Die Elimination wird oft mit Vorteil mittels **unbestimmter Multiplikatoren** bewerkstelligt (Methode der **Lagrangeschen** Multiplikatoren). Zu diesem Zwecke multipliziere man jede der Gleichungen 4) mit einem unbestimmten Faktor $k_1, k_2, \ldots\ldots, k_g$ und addiere dieselben sodann zur Gleichung 3); man findet dadurch:

$$5) \qquad dy + k_1\, d\varphi_1 + k_2\, d\varphi_2 + \cdots\cdots + k_g\, d\varphi_g = 0,$$

oder entwickelt und nach den Differentialen geordnet:

$$6) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \cdots\cdots + k_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial x_1}\right) d x_1 + \\ + &\left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \cdots\cdots + k_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial x_2}\right) d x_2 + \\ + &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ + &\left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \cdots\cdots + k_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial x_n}\right) d x_n = 0. \end{aligned} \right.$$

In dieser Gleichung hat man nun zunächst die Koeffizienten derjenigen Differentiale gleich Null zu setzen, welche man eliminieren will; die übrig bleibenden Differentiale sind sodann willkürlich und aus diesem Grunde ihre Koeffizienten ebenfalls gleich Null zu setzen. Auf diese Weise erhält man das System der n Gleichungen:

$$7) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_1} + k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \cdots\cdots + k_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial x_1} = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial x_2} + k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \cdots\cdots + k_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial x_2} = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial f}{\partial x_n} + k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \cdots\cdots + k_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial x_n} = 0, \end{aligned} \right.$$

aus welchen sich durch Elimination der Multiplikatoren $k_1, k_2, \ldots\ldots, k_g$, g an der Zahl, die $n-g$ Endgleichungen ergeben, welche in Verbindung mit den Bedingungsgleichungen 2) die gesuchten Werte der Variablen bestimmen. Man erkennt, daß die Bedingungsgleichungen 2) und die Gleichungen 7), zusammen $g+n$ an der Zahl, gerade zur Bestimmung der $g+n$ Größen $k_1, k_2, \ldots\ldots, k_g$; $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ ausreichend sind.

Man bemerkt von selbst, daß die linken Teile der Gleichungen 7), auf deren Bildung es nur ankommt, nichts anderes sind, als die partiellen Differentialquotienten der Funktion

$$F(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = f + k_1\, \varphi_1 + k_2\, \varphi_2 + \cdots\cdots + k_g\, \varphi_g;$$

man erhält dieselbe, wenn man zur Funktion, welche ein Extrem werden soll, die linken Seiten der auf Null reduzierten Bedingungsgleichungen addiert, nachdem zuvor jede dieser Seiten mit einem unbestimmten Faktor multipliziert worden ist.

Alles kurz zusammengefaßt gibt die Regel:

Um die Wertsysteme der Variablen $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ zu finden, für welche die Funktion $f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ bei Erfüllung der Bedingungsgleichungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \ldots\ldots\ldots$, $\varphi_g = 0$ einen extremen Wert erhält, bilde man die Funktion

$$F = f + k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2 + \cdots\cdots + k_g \varphi_g,$$

suche sodann die Systeme der Variablen $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ und die Werte $k_1, k_2, \ldots\ldots, k_g$ auf, welche F zu einem Extrem machen; die dabei erhaltenen Systeme $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ sind die gesuchten.

Auf diese Weise findet man alle Wertsysteme der n Veränderlichen, für welche möglicherweise ein Extrem eintreten kann. Ob dann für ein so gefundenes Wertsystem wirklich ein Extrem eintritt, geht in vielen Fällen schon aus der Natur der Aufgabe hervor. Deshalb möge hier die etwas weitläufige Entwicklung eines allgemein gültigen Kriteriums übergangen werden.

4. Ausgleichung bedingter Beobachtungen mittels Korrelaten (direkte Lösung des Problems).

Außer der im Punkte 1 dieses Abschnittes dargestellten indirekten Lösung läßt das Problem eine direkte Lösung zu, die auf dem Prinzipe beruht, die Summe $[\lambda\lambda]$ so klein zu machen, als es die Bedingungen 4) des Punktes 1 dieses Abschnittes gestatten. Analytisch kommt dies darauf zurück, das System der λ so zu bestimmen, daß

$[\lambda\lambda]$ ein Minimum

werde unter gleichzeitiger Erfüllung der Gleichungen:

$$1)\qquad \left\{\begin{array}{l} [a\lambda] + w_1 = 0, \\ [b\lambda] + w_2 = 0, \\ \ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots \\ [g\lambda] + w_g = 0; \end{array}\right.$$

dies aber ist dann geschehen, wenn man die λ und die Multiplikatoren $k_1, k_2, \ldots\ldots, k_g$ so bestimmt, daß die Funktion

$$2)\quad [\lambda\lambda] - 2k_1\left\{[a\lambda] + w_1\right\} - 2k_2\left\{[b\lambda] + w_2\right\} - \cdots\cdots - 2k_g\left\{[g\lambda] + w_g\right\}$$

ein absolutes Minimum erlangt und die Gleichungen 1) befriedigt werden. Die Multiplikatoren sind deshalb negativ und zweifach gewählt, weil sich nachher -2 wieder von selbst tilgt.

Die Ausführung dieser Forderung, wobei man sich auf den Fall von drei Bedingungsgleichungen beschränken möge, führt, wenn man 2) bezüglich der einzelnen λ differentiiert, auf das Gleichungssystem:

$$3)\quad \begin{cases} \lambda_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3, \\ \lambda_2 = a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_n = a_n k_1 + b_n k_2 + c_n k_3, \end{cases}$$

$$1^*)\quad \begin{cases} [a\lambda] + w_1 = 0, \\ [b\lambda] + w_2 = 0, \\ [c\lambda] + w_3 = 0, \end{cases}$$

das aus $n + 3$ Gleichungen besteht und daher zur Lösung der Aufgabe (Bestimmung von k_1, k_2, k_3, ferner von $\lambda_1, \lambda_2, \dots\dots, \lambda_n$) gerade ausreicht.

Die Hilfsgrößen $k_1, k_2, \dots\dots, k_g$ heißen nach Gauß **Korrelaten der Bedingungsgleichungen**; die Gleichungen 3), welche die λ durch sie ausdrücken, die **Korrelatengleichungen**. Korrelaten sind in derselben Anzahl vorhanden, als Bedingungsgleichungen vorliegen.

Durch Einsetzung von 3) in 1*) ergeben sich zur Berechnung der Korrelaten die **Normalgleichungen**:

$$4)\quad \begin{cases} [aa]k_1 + [ab]k_2 + [ac]k_3 + w_1 = 0, \\ [ab]k_1 + [bb]k_2 + [bc]k_3 + w_2 = 0, \\ [ac]k_1 + [bc]k_2 + [cc]k_3 + w_3 = 0; \end{cases}$$

dieselben sind ähnlich gebaut wie die Normalgleichungen bei vermittelnden Beobachtungen.

Ist die Berechnung der Korrelaten vollzogen, so erhält man durch Einsetzen der für dieselben gefundenen Werte in 3) das vorteilhafteste System der λ, und damit ist auch das vorteilhafteste System der Werte der Unbekannten gefunden:

$$5)\quad \begin{cases} x_1 = l_1 + \lambda_1, \\ x_2 = l_2 + \lambda_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n = l_n + \lambda_n. \end{cases}$$

Zur Auflösung der Normalgleichungen wird man, sobald ihre Zahl einigermaßen groß ist und ihre Koeffizienten vielziffrige Zahlen

sind, das im Punkte 8 des V. Abschnittes erläuterte Verfahren von Gauß anwenden, welches schließlich zu dem System **reduzierter Normalgleichungen:**

$$6)\quad \begin{cases} k_1 + \frac{[a\,b]}{[a\,a]} k_2 + \frac{[a\,c]}{[a\,a]} k_3 + \frac{w_1}{[a\,a]} = 0, \\ \qquad k_2 + \frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]} k_3 + \frac{[w_2\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]} = 0, \\ \qquad\qquad k_3 + \frac{[w_3\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]} = 0. \end{cases}$$

hinführt. Dabei haben die neu eingeführten Symbole $[w_2\,.\,1]$, $[w_3\,.\,1]$, $[w_3\,.\,2]$ folgende Bedeutung:

$$7)\quad \begin{cases} [w_2\,.\,1] = w_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]} w_1, \\ [w_3\,.\,1] = w_3 - \frac{[a\,c]}{[a\,a]} w_1, \\ [w_3\,.\,2] = [w_3\,.\,1] - \frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]} [w_2\,.\,1]. \end{cases}$$

Es erübrigt noch die **Genauigkeitsbestimmung.** Was den **mittleren Fehler einer Beobachtung** anbelangt, so ergibt sich dieser aus der Bemerkung am Schlusse des Punktes 1 dieses Abschnittes, wonach die Aufgabe der Ausgleichung von n Größen mit g Bedingungsgleichungen äquivalent ist der Ausgleichung von n vermittelnden Beobachtungen mit $u = n - g$ Unbekannten; mithin ist der im Punkte 3 des V. Abschnittes (Seite 134) abgeleiteten Gleichung $\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-u}}$ zufolge

$$8)\quad \mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-(n-g)}} = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{g}}.$$

Dieser mittlere Fehler bezieht sich aber auf die einzelne Beobachtung als solche, nicht aber auf die **ausgeglichene Beobachtung,** die durch die Ausgleichung mit den andern Beobachtungen in Kombination getreten ist. Um z. B. den mittleren Fehler von

$$x_1 = l_1 + \lambda_1$$

zu bestimmen, wäre der folgende Weg einzuschlagen. Nach 3) stellt sich λ_1 durch die Korrelaten dar; für diese ergeben sich aus 4) lineare Ausdrücke der w; die w aber sind nach 2) des Punktes 1 dieses Abschnittes Funktionen der unabhängig erhaltenen Beobachtungen $l_1, l_2, \ldots\ldots, l_n$; folglich ist x_1 auch eine Funktion dieser letzteren

Größen, und der mittlere Fehler von x ist mit Benützung von μ nach den Vorschriften des Punktes 6 des IV. Abschnittes (Seite 105, allgemeiner Fall) zu berechnen. Hiemit sei hier nur die Angabe des wesentlichsten Gedankenganges angeführt, der immer zu befolgen ist, wenn es sich um die Genauigkeitsbestimmung einer Funktion der ausgeglichenen Beobachtungen handelt; bezüglich der systematischen Durchführung sei auf die Ausgleichungsrechnung u. s. w. von Helmert, 1872, Seite 174, (III. Mittlerer Fehler einer Funktion der ausgeglichenen Beobachtungswerte) hingewiesen.

Eine summarische Rechnungskontrolle besteht in der zweifachen Bestimmung von $[\lambda\lambda]$. Außer der direkten Bestimmung, welche in dem Quadrieren der einzelnen λ und darauffolgender Summenbildung besteht, gibt es eine indirekte Berechnung jener Summe. Multipliziert man nämlich jede der Gleichungen 3) mit dem entsprechenden λ und bildet hierauf die Summe unter Rücksichtnahme auf 1*), so er gibt sich:

$$9) \qquad [\lambda\lambda] = -[k\,w].$$

Man bedient sich in der Praxis zur Ausgleichung bedingter Beobachtungen gewöhnlich der bequemeren direkten Methode; denn ist die Anzahl der Unbekannten und Bedingungsgleichungen beträchtlich, so wird die indirekte Methode infolge der auszuführenden Eliminationen weitläufig.

Die allgemeine Untersuchung soll nun auf den Fall von vier Unbekannten X_1, X_2, X_3, X_4 mit drei linearen Bedingungsgleichungen angewendet werden.

Zwischen den wahrscheinlichsten Werten x der Unbekannten X mögen folgende streng zu erfüllende Bedingungsgleichungen bestehen:

$$10) \quad \begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0, \\ b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = 0, \\ c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 = 0. \end{cases}$$

Setzt man an die Stelle der wahrscheinlichsten Werte x_1, x_2, x_3, x_4 die Beobachtungswerte l_1, l_2, l_3, l_4, so werden die Gleichungen 10) nicht befriedigt, sondern sie geben:

$$11) \quad \begin{cases} a_0 + a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + a_4 l_4 = w_1, \\ b_0 + b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3 + b_4 l_4 = w_2, \\ c_0 + c_1 l_1 + c_2 l_2 + c_3 l_3 + c_4 l_4 = w_3. \end{cases}$$

Damit die Widersprüche w_1, w_2, w_3 verschwinden, sind an den Beobachtungswerten l_1, l_2, l_3, l_4 beziehungsweise die Verbesserungen λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 anzubringen, d. h. man setzt:

12) $$\begin{cases} x_1 = l_1 + \lambda_1, \\ x_2 = l_2 + \lambda_2, \\ x_3 = l_3 + \lambda_3, \\ x_4 = l_4 + \lambda_4. \end{cases}$$

Hiemit geht die erste der Gleichungen 11) über in:

$$a_0 + a_1 (l_1 + \lambda_1) + a_2 (l_2 + \lambda_2) + a_3 (l_3 + \lambda_3) + a_4 (l_4 + \lambda_4) = 0;$$

subtrahiert man hievon die erste Gleichung des Systems 11), so erhält man:

$$a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + a_3 \lambda_3 + a_4 \lambda_4 + w_1 = 0.$$

Es besteht also zwischen den Verbesserungen das Gleichungssystem:

13) $$\begin{cases} a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + a_3 \lambda_3 + a_4 \lambda_4 + w_1 = 0, \\ b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 + b_3 \lambda_3 + b_4 \lambda_4 + w_2 = 0, \\ c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 + c_3 \lambda_3 + c_4 \lambda_4 + w_3 = 0. \end{cases}$$

Mit Anwendung von Summenklammern kann man 11) und 13) auch schreiben:

14) $$\begin{cases} a_0 + [a\, l] = w_1, \\ b_0 + [b\, l] = w_2, \\ c_0 + [c\, l] = w_3, \end{cases}$$

15) $$\begin{cases} [a\, \lambda] = - w_1, \\ [b\, \lambda] = - w_2, \\ [c\, \lambda] = - w_3. \end{cases}$$

Die drei Gleichungen 13) bezeichnet man ebenfalls als Bedingungsgleichungen, als sogenannte **abgeleitete Bedingungsgleichungen**; sie geben die Bedingungen an, welche die Verbesserungen λ genau erfüllen müssen.

Außer den Gleichungen 13) hat man zur Bestimmung der λ die Grundbedingung:

16) $$[\lambda \lambda] = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 \text{ ein Minimum.}$$

Um dieses Minimum mit Rücksicht auf die Nebenbedingungen 13) zu erhalten, hat man nach der Theorie über **relative** oder **bedingte Extreme** (siehe Punkt 3 dieses Abschnittes) folgenden Vorgang einzuschlagen:

Man multipliziere die linken Seiten der auf Null reduzierten Bedingungsgleichungen 13) der Reihe nach mit den unbestimmten Multiplikatoren $-2\,k_1$, $-2\,k_2$, $-2\,k_3$, addiere sodann diese Produkte

zur Funktion 16), die ein Minimum werden soll, also zu $[\lambda \lambda]$, ordnet endlich nach λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, so erhält man die Funktion:

$$17) \quad \begin{aligned} F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \lambda_1^2 - 2(a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3)\lambda_1 + \\ + \lambda_2^2 - 2(a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3)\lambda_2 + \\ + \lambda_3^2 - 2(a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3)\lambda_3 + \\ + \lambda_4^2 - 2(a_4 k_1 + b_4 k_2 + c_4 k_3)\lambda_4 - \\ - 2(w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3). \end{aligned}$$

Die Bedingungen dafür, daß $[\lambda \lambda]$ unter Einhaltung der Gleichungen 13) ein Minimum erlange, sind die nämlichen wie die Bedingungen für ein absolutes Minimum der mit den Konstanten k_1, k_2, k_3 gebildeten Funktion $F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$.

Diese Bedingungen lauten:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_3} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_4} = 0$$

oder mit Rücksicht auf die spezielle Form der Funktion $F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$:

$$18) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda_1 &= a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3, \\ \lambda_2 &= a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3, \\ \lambda_3 &= a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3, \\ \lambda_4 &= a_4 k_1 + b_4 k_2 + c_4 k_3. \end{aligned} \right.$$

Setzt man diese Ausdrücke wieder in die Bedingungsgleichungen 13) und ordnet nach k_1, k_2, k_3, so bekommt man zur Bestimmung der Korrelaten die Normalgleichungen:

$$19) \quad \left\{ \begin{aligned} [a a] k_1 + [a b] k_2 + [a c] k_3 + w_1 &= 0, \\ [a b] k_1 + [b b] k_2 + [b c] k_3 + w_2 &= 0, \\ [a c] k_1 + [b c] k_2 + [c c] k_3 + w_3 &= 0; \end{aligned} \right.$$

ihre Anzahl ist gleich der Anzahl der Bedingungsgleichungen.

Zusammenfassung: Nachdem die Koeffizienten a, b, c und die Widersprüche w_1, w_2, w_3 der Bedingungsgleichungen 13) bestimmt sind, berechnet man die Koeffizienten $[a a]$, $[a b]$ u. s. w. der Normalgleichungen 19), löst diese nach k_1, k_2, k_3 auf und berechnet dann aus 18) die Verbesserungen λ_1, λ_2, λ_3, λ_4. Die Zufügung der λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 zu den zugehörigen Beobachtungen l_1, l_2, l_3, l_4 gibt dann die wahrscheinlichsten Werte x_1, x_2, x_3, x_4 der Unbekannten X_1, X_2, X_3, X_4.

Nachdem λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 ausgerechnet sind, findet man auch die Quadratsumme $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 = [\lambda \lambda]$ und hierauf den mittleren Fehler μ einer Beobachtung aus

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda \lambda]}{3}}.$$

Beispiel. Um das Verfahren an einem einfachen Beispiele zu erläutern, nehme man an, es seien die Winkel zwischen den um einen Punkt A im Horizont liegenden fünf Objekten 1, 2, 3, 4 und 5 mit gleicher Genauigkeit gemessen worden, und man habe erhalten:

$$\begin{aligned}(1.2) &= l_1 = 40^0\,29'\,17'',\\ (2.3) &= l_2 = 80\;\;35\;\;26\;,\\ (3.4) &= l_3 = 96\;\;24\;\;38\;,\\ (4.5) &= l_4 = 30\;\;\;7\;\;26\;,\\ (5.1) &= l_5 = 112\;\;23\;\;48\;.\end{aligned}$$

Die Summe dieser Winkel beträgt:

$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 = 360^0\,0'\,35''.$$

Da die theoretische Summe, der sogenannte Horizontabschluß, gleich 360⁰ ist, so ist der Widerspruch $360^0\,0'\,35'' - 360^0 = 35''$ und

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + 35'' = 0$$

die von den Verbesserungen zu befriedigende Bedingungsgleichung.

Da $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1$ und alle weiteren Koeffizienten aus der allgemeinen Darstellung Null sind, lauten die Korrelatengleichungen:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = k;$$

die einzige Normalgleichung für die Bestimmung der Korrelate k heißt:

$$5\,k + 35'' = 0;$$

daraus rechnet sich die Korrelate mit:

$$k = -7'',$$

somit ist auch:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = -7''.$$

Der Widerspruch ist also im Falle gleicher Genauigkeit der Beobachtungen auf alle fünf Winkel — ohne Rücksicht auf die Größe der einzelnen Winkel — gleichmäßig zu verteilen. Die ausgeglichenen Beobachtungen

$$\begin{aligned}x_1 &= l_1 + \lambda_1 = 40^0\,29'\,10'',\\ x_2 &= l_2 + \lambda_2 = 80\;\;35\;\;19\;,\\ x_3 &= l_3 + \lambda_3 = 96\;\;24\;\;31\;,\\ x_4 &= l_4 + \lambda_4 = 30\;\;\;7\;\;19\;,\\ x_5 &= l_5 + \lambda_5 = 112\;\;23\;\;41\end{aligned}$$

erfüllen die durch die Theorie geforderte Summe, denn

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 360^0.$$

Weil $[\lambda\lambda] = 5 \times 49 = 245$, so ist der mittlere Fehler einer unausgeglichenen Beobachtung

$$\mu = \sqrt{\frac{245}{1}} = \pm 15{\cdot}65''.$$

Um den mittleren Fehler der ausgeglichenen Beobachtung $x_1 = l_1 + \lambda_1$ zu erhalten, beachte man, daß $\lambda_1 = k$, weiter $k = -\frac{w}{5}$ und $w = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 - S$ ist, wenn S die theoretische Winkelsumme bedeutet; mithin ist

$$x_1 = \frac{S}{5} + \frac{4}{5} l_1 - \frac{1}{5} l_2 - \frac{1}{5} l_3 - \frac{1}{5} l_4 - \frac{1}{5} l_5$$

und daher nach Punkt 6 des IV. Abschnittes (Seite 105, allgemeiner Fall):

$$\mu_{x_1} = \mu \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \mu \sqrt{\frac{4}{5}} =$$
$$= \mu \times 0{\cdot}8944'' = 13{\cdot}997'';$$

ebenso groß ergeben sich μ_{x_2}, μ_{x_3}, μ_{x_4} und μ_{x_5}.

Wie man sieht, werden die mittleren Fehler durch die Ausgleichung vermindert.

5. Beobachtungen ungleicher Genauigkeit.

Sind die Beobachtungen $l_1, l_2, \ldots\ldots, l_n$ ungleich genau und ist das Verhältnis ihrer Genauigkeit durch die Gewichte $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$ gegeben, so bilden die Forderungen:

$$[p\lambda\lambda] \text{ ein Minimum,}$$

1) $$[a\lambda] + w_1 = 0, \quad [b\lambda] + w_2 = 0, \quad [c\lambda] + w_3 = 0$$

die Grundlage der Lösung, drei Bedingungsgleichungen vorausgesetzt.

Durch einmalige Differentiation der Funktion

$$[p\lambda\lambda] - 2k_1\left\{[a\lambda] + w_1\right\} - 2k_2\left\{[b\lambda] + w_2\right\} - 2k_3\left\{[c\lambda] + w_3\right\}$$

bezüglich der einzelnen λ und Nullsetzen der Ableitungen ergeben sich die Korrelatengleichungen:

2) $$\left\{\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{a_1}{p_1} k_1 + \frac{b_1}{p_1} k_2 + \frac{c_1}{p_1} k_3, \\ \lambda_2 &= \frac{a_2}{p_2} k_1 + \frac{b_2}{p_2} k_2 + \frac{c_2}{p_2} k_3, \\ \lambda_3 &= \frac{a_3}{p_3} k_1 + \frac{b_3}{p_3} k_2 + \frac{c_3}{p_3} k_3; \end{aligned}\right.$$

ihre Einführung in die Bedingungsgleichungen 1) liefert die Normalgleichungen für die Bestimmung der Korrelaten:

$$\text{3)} \quad \begin{cases} \left[\frac{a\,a}{p}\right]k_1 + \left[\frac{a\,b}{p}\right]k_2 + \left[\frac{a\,c}{p}\right]k_3 + w_1 = 0, \\ \left[\frac{a\,b}{p}\right]k_1 + \left[\frac{b\,b}{p}\right]k_2 + \left[\frac{b\,c}{p}\right]k_3 + w_2 = 0, \\ \left[\frac{a\,c}{p}\right]k_1 + \left[\frac{b\,c}{p}\right]k_2 + \left[\frac{c\,c}{p}\right]k_3 + w_3 = 0, \end{cases}$$

deren Auflösung nach demselben Schema vor sich geht wie im Falle gleich genauer Beobachtungen. Aus den Korrelaten berechnen sich nach 2) die Verbesserungen und aus diesen die ausgeglichenen Beobachtungen:

$$\text{4)} \quad \begin{cases} x_1 = l_1 + \lambda_1, \\ x_2 = l_2 + \lambda_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n = l_n + \lambda_n. \end{cases}$$

Für den mittleren Fehler der Gewichtseinheit gilt nun die aus Punkt 7 des V. Abschnittes, Gleichung 6) (Seite 145) hervorgehende Formel

$$\text{5)} \qquad \mu = \sqrt{\frac{[p\,\lambda\,\lambda]}{g}},$$

wenn g die Anzahl der Bedingungsgleichungen bedeutet.

Der Beobachtung l_i an sich, also vor der Ausgleichung, kommt der mittlere Fehler

$$\text{6)} \qquad \mu_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}$$

zu; um den mittleren Fehler der ausgeglichenen Beobachtung $x_i = l_i + \lambda_i$ zu bestimmen, müßte der im Punkte 4 dieses Abschnittes (Seite 202) angedeutete Weg eingeschlagen werden.

Die Summe $[p\,\lambda\,\lambda]$ kann auch hier zur Kontrolle auf indirektem Wege bestimmt werden; es ergibt sich aus den Gleichungen 2) mit Zuhilfenahme von 1) so wie im früheren Falle:

$$\text{7)} \qquad [p\,\lambda\,\lambda] = -\,[k\,w].$$

Beispiel. Horizontabschluß. Es seien die Winkel zwischen den um einen Punkt A im Horizonte liegenden Objekten 1, 2, 3, 4 gemessen worden und man habe erhalten: *)

*) Siehe die Lösung desselben Beispiels nach der indirekten Methode unter Punkt 2 dieses Abschnittes, Seite 193.

$$\begin{aligned}(1.2) &= l_1 = 75^0\,28'\,26{\cdot}37'', && \text{Gewicht } p_1 = 2,\\ (2.3) &= l_2 = 112\;\;15\;\;54{\cdot}08\;, && \qquad\text{„}\quad p_2 = 4,\\ (3.4) &= l_3 = 101\;\;42\;\;13{\cdot}94\;, && \qquad\text{„}\quad p_3 = 4,\\ (4.1) &= l_4 = 70\;\;33\;\;28{\cdot}15\;, && \qquad\text{„}\quad p_4 = 1.\end{aligned}$$

Die Summe

$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = 360^0\,0'\,2{\cdot}49''$$

zeigt gegenüber der theoretischen Summe 360^0 einen Widerspruch $w = 2{\cdot}49''$, so daß die Bedingungsgleichung

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + 2{\cdot}49'' = 0$$

zu befriedigen sein wird. Da in der einzigen Bedingungsgleichung alle Koeffizienten gleich sind, so lauten die Korrelatengleichungen:

$$\lambda_1 = \frac{k}{p_1},\quad \lambda_2 = \frac{k}{p_2},\quad \lambda_3 = \frac{k}{p_3},\quad \lambda_4 = \frac{k}{p_4}\quad .$$

und die Normalgleichung:

$$\left[\frac{1}{p}\right] k + w = 0,$$

so daß

$$k = -\frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]} = -\frac{2{\cdot}49}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{1}} = -\frac{2{\cdot}49}{2} = -1{\cdot}245''.$$

Mithin ist:

$$\lambda_1 = -\frac{1{\cdot}245}{2} = -0{\cdot}623'',\qquad \lambda_2 = -\frac{1{\cdot}245}{4} = -0{\cdot}311'',$$

$$\lambda_3 = -\frac{1{\cdot}245}{4} = -0{\cdot}311'',\qquad \lambda_4 = -\frac{1{\cdot}245}{1} = -1{\cdot}245''$$

und die ausgeglichenen Winkel

$$\begin{aligned}x_1 &= l_1 + \lambda_1 = 75^0\,28'\,25{\cdot}747'',\\ x_2 &= l_2 + \lambda_2 = 112\;\;15\;\;53{\cdot}719\;,\\ x_3 &= l_3 + \lambda_3 = 101\;\;42\;\;13{\cdot}629\;,\\ x_4 &= l_4 + \lambda_4 = 70\;\;33\;\;26{\cdot}905\end{aligned}$$

ergeben die theoretische Summe 360^0.

Durch direkte Ausrechnung findet man

$$[p\lambda\lambda] = 3{\cdot}100051;$$

mittels der Kontrollgleichung 7)

$$[p\lambda\lambda] = 1{\cdot}245 \times 2{\cdot}49 = 3{\cdot}10005,$$

daraus bestimmt sich der mittlere Fehler der Gewichtseinheit

$$\mu = \sqrt{3{\cdot}10005} = 1{\cdot}76'';$$



die unausgeglichenen Beobachtungen haben somit die mittleren Fehler:

$$\mu_1 = \frac{\mu}{\sqrt{p_1}} = 1{\cdot}25'',$$

$$\mu_2 = \frac{\mu}{\sqrt{p_2}} = 0{\cdot}88'',$$

$$\mu_3 = \frac{\mu}{\sqrt{p_3}} = 0{\cdot}88'',$$

$$\mu_4 = \frac{\mu}{\sqrt{p_4}} = 1{\cdot}76''.$$

Um den mittleren Fehler der ausgeglichenen Beobachtung

$$x_1 = l_1 + \lambda_1$$

zu finden, beachte man, daß

$$\lambda_1 = \frac{k}{p_1}, \text{ weiter } k = -\frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]} \text{ und } w = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 - S,$$

wenn S die theoretische Winkelsumme bezeichnet; mithin ist

$$x_1 = \frac{S}{p_1\left[\frac{1}{p}\right]} + \left(1 - \frac{1}{p_1\left[\frac{1}{p}\right]}\right) l_1 - \frac{1}{p_1\left[\frac{1}{p}\right]} l_2 - \frac{1}{p_1\left[\frac{1}{p}\right]} l_3 - \frac{1}{p_1\left[\frac{1}{p}\right]} l_4$$

und nach Punkt 6 des IV. Abschnittes (Seite 105, allgemeiner Fall):

$$\mu_{x_1} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{p_1\left[\frac{1}{p}\right]}\right)^2 \mu_1^2 + \frac{1}{p_1^2\left[\frac{1}{p}\right]^2}\mu_2^2 + \frac{1}{p_1^2\left[\frac{1}{p}\right]^2}\mu_3^2 + \frac{1}{p_1^2\left[\frac{1}{p}\right]^2}\mu_4^2} =$$

$$= \mu\sqrt{\left(1 - \frac{2}{p_1\left[\frac{1}{p}\right]}\right)\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2\left[\frac{1}{p}\right]^2}\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4}\right)} =$$

$$= \mu\sqrt{\left(1 - \frac{2}{p_1\left[\frac{1}{p}\right]}\right)\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2\left[\frac{1}{p}\right]}} =$$

$$= \mu\sqrt{\frac{p_1\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4}\right) - 2 + 1}{p_1^2\left[\frac{1}{p}\right]}} =$$

$$= \mu\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4}\right)\frac{1}{p_1}}{\left[\frac{1}{p}\right]}} = 1{\cdot}76\sqrt{\frac{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}}{2}} = 1{\cdot}08'';$$

ebenso findet man:

$$\mu_{x_2} = \mu \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_3}+\frac{1}{p_4}\right)\frac{1}{p_2}}{\left[\frac{1}{p}\right]}} = 1\cdot76 \sqrt{\frac{\frac{7}{4}\times\frac{1}{4}}{2}} = 0\cdot65'',$$

$$\mu_{x_3} = \mu \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_4}\right)\frac{1}{p_3}}{\left[\frac{1}{p}\right]}} = 1\cdot76 \sqrt{\frac{\frac{7}{4}\times\frac{1}{4}}{2}} = 0\cdot65'',$$

$$\mu_{x_4} = \mu \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}\right)\frac{1}{p_4}}{\left[\frac{1}{p}\right]}} = 1\cdot76 \sqrt{\frac{1\times1}{2}} = 1\cdot24'';$$

die mittleren Fehler erscheinen durch die Ausgleichung vermindert.

Anmerkung. Zur unzweideutigen Festlegung von s Strahlen in einer Station sind $s-1$ Winkel erforderlich; hat man mehr Winkel, z. B. z Winkel gemessen, so sind $z-(s-1)$ Winkel überschüssig und es ist nötig, auf der Station eine Ausgleichung vorzunehmen. Die überschüssige Anzahl der gemessenen Winkel gibt die Anzahl der Stationsgleichungen, die naturgemäß Winkelgleichungen sind und denen die Bedeutung von Bedingungsgleichungen zukommt. Unter Horizontabschluß versteht man die Aufgabe, die um einen Punkt liegenden Winkel auf 360° auszugleichen. Ein Horizontabschluß, in welchem nur eine Bedingungsgleichung zwischen den gemessenen Winkeln besteht, wobei also nur so viele Horizontalwinkel ermittelt wurden, als zum Schlusse des Horizontes erforderlich sind, wird ein reiner Horizontabschluß oder ein Horizontabschluß ohne Kontrollmessung genannt. Es gibt auch Horizontabschlüsse, in welchen zur Festlegung von s Strahlen nicht s, sondern $z > s$ Einzelwinkel gemessen werden; die Anzahl der Bedingungsgleichungen ist daher größer als eins. Ein solcher Horizontabschluß wird als Horizontabschluß mit Kontrollmessungen bezeichnet. Wenn man in einer Station mehrere Richtungen bestimmt, welche nicht den Horizont ausfüllen, wobei Teil- und Summenwinkel für sich gemessen werden, so soll dies zum Unterschiede vom Horizontabschluß ein Stationsabschluß oder ein Partial-Horizontabschluß heißen.

VII. Abschnitt.

Vergleichung des Fehlergesetzes mit der Erfahrung.

1. Allgemeine Bemerkung.

Eine wesentliche Stütze des Gaußschen Fehlergesetzes bildet die Übereinstimmung, welche zwischen seinen Folgerungen und den Ergebnissen wirklich ausgeführter Beobachtungen besteht. Sie hat dem Gesetze, trotz der Bedenken, welche gegen die verschiedenen Begründungen vom theoretischen Standpunkte erhoben werden können, die allgemeine Annahme von Seite der Beobachter eingebracht.

Mittel und Wege, Vergleiche zwischen Theorie und Erfahrung anzustellen, bieten sich in großer Zahl. Einige derselben, entnommen aus Czubers Werk „Theorie der Beobachtungsfehler", sollen hier angeführt werden.

Vorher aber ist die Beantwortung der folgenden Frage von Wichtigkeit: Welches Gesetz befolgen die scheinbaren Fehler $-\lambda$, wenn die wahren Fehler $-\varepsilon$ dem Gesetze $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$ unterworfen sind? Das Resultat der Untersuchung, auf welche hier nicht eingegangen werden soll und diesbezüglich auf Czubers eben genanntes Werk verwiesen werden muß (Seite 156, Punkt 66) lautet: Wenn die wahren Fehler $-\varepsilon$ einer Reihe von n Beobachtungen das Gesetz $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$ befolgen, so sind die scheinbaren Fehler $-\lambda$ (die Abweichungen der Beobachtungswerte vom arithmetischen Mittel) einem Gesetze von der nämlichen Form, jedoch mit einem im Verhältnis $\sqrt{n} : \sqrt{n-1}$ größeren Präzisionsmaß unterworfen, d. h. die scheinbaren Fehler $-\lambda$ befolgen das Gesetz

1) $$\frac{h\sqrt{\frac{n}{n-1}}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{n h^2}{n-1}\lambda^2}.$$

Faßt man die Reihe der λ wie eine Reihe von wahren Fehlern auf, so ist a priori der mittlere Fehler dieser Reihe, d. i. die mittlere Abweichung einer Beobachtung vom arithmetischen Mittel vermöge 1)

$$\mu_\lambda = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{n-1}{2n}},$$

hingegen der mittlere Fehler in der Reihe der wahren Fehler $-\varepsilon$

$$\mu = \frac{1}{h\sqrt{2}},$$

folglich

2) $$\mu = \mu_\lambda \sqrt{\frac{n}{n-1}};$$

anderseits ist auf Grund der beobachteten λ

3) $$\mu_\lambda = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n}};$$

durch Verbindung dieser Gleichung mit der Gleichung 2) ergibt sich wieder die schon im Punkte 2 des IV. Abschnittes, Seite 85, abgeleitete Formel

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}.$$

2. Methode der Zusammenfassung der Fehler in Gruppen und Vergleich der Anzahl der Fehler in jeder Gruppe mit der nach der Theorie zu erwartenden Anzahl.

Denkt man sich die Fehler ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen in steigender Größe geordnet und mittels der durch die Werte der Zahlen 0, a_1, a_2, ..., a_k, ..., a_q, ... festgelegten Intervalle in Gruppen abgeteilt, so mögen diese Gruppen der Reihe nach n_1, n_2, ..., n_k, ..., n_q, ... Fehler umfassen. Ist das Präzisionsmaß h der Beobachtungsreihe bekannt, so hat man a priori unter n Fehlern

$$n \times \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{a_k h} e^{-t^2} dt = n \times \Phi(a_k h)$$

solche Fehler zu erwarten, deren Absolutwert zwischen 0 und a_k gelegen ist, somit

$$n_k = n\left\{\Phi(a_k h) - \Phi(a_{k-1} h)\right\}$$

Fehler, welche in die k-te Gruppe fallen. Führt man diese Rechnung für alle Gruppen durch, so gibt die Vergleichung der a priori zu erwartenden mit den wirklich beobachteten Anzahlen eine durchgreifende Prüfung der ganzen Fehlerreihe.

Kennt man statt h eine der Größen r, μ, ϑ, so tritt an die Stelle von $\Phi(a_k h)$ beziehungsweise

$$\Phi\left(\varrho\,\frac{a_k}{r}\right),\quad \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{a_k}{\mu}\right),\quad \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{a_k}{\vartheta}\right).$$

In allen Fällen wird man sich der Tabelle I bedienen, welche für nach konstanten Differenzen fortschreitende Werte des Arguments $a h$ die Funktionswerte $\Phi(a h)$ gibt. Dem ersten, zweiten und dritten Falle sind beziehungsweise die Tabellen II, welche auszugsweise durch III vertreten ist, IV und V angepaßt; sie enthalten die Funktionswerte beziehungsweise nach den Argumenten $\frac{a_k}{r}$, $\frac{a_k}{\mu}$ und $\frac{a_k}{\vartheta}$ geordnet. Aus der Tabelle II oder III übersieht man mit einem Blick, daß unter 1000 Beobachtungen irgend welcher Gattung sich befinden werden

264	Beobachtungen,	deren	Fehler	nicht	größer	sind	als	$0{\cdot}5\,r$,
500	„	„	„	„	„	„	„	r,
688	„	„	„	„	„	„	„	$1{\cdot}5\,r$,
823	„	„	„	„	„	„	„	$2{\cdot}0\,r$,
908	„	„	„	„	„	„	„	$2{\cdot}5\,r$,
957	„	„	„	„	„	„	„	$3{\cdot}0\,r$,
982	„	„	„	„	„	„	„	$3{\cdot}5\,r$,
993	„	„	„	„	„	„	„	$4{\cdot}0\,r$;

es sind also nur 7 Fehler größer als $4\,r$ und nur 1 Fehler größer als $5\,r$.

Durch Subtraktion je zweier dieser Zahlen findet man weiters, daß von 1000 Fehlern

zwischen	0	und	$0{\cdot}5\,r$	liegen	werden	264	Fehler,
„	$0{\cdot}5\,r$	„	$1{\cdot}0\,r$	„	„	236	„
„	$1{\cdot}0\,r$	„	$1{\cdot}5\,r$	„	„	188	„
„	$1{\cdot}5\,r$	„	$2{\cdot}0\,r$	„	„	135	„

u. s. w. Hienach ist eine Beobachtung, deren Fehler größer als $5\,r$ ist, bereits als unzuverlässig anzusehen.

Wie nahe diese theoretische Bestimmung mit der Erfahrung übereinstimmt, zeigen beispielsweise die Beobachtungen von Bradley (siehe Punkt 3 dieses Abschnittes).

Wahre Fehler werden nur ausnahmsweise vorliegen. Ist als Ersatz für dieselben die Reihe der scheinbaren Fehler $-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots\ldots, -\lambda_n$ gegeben, so werden diese ebenso wie die wahren dem Gaußschen Gesetze folgen und die Untersuchung bleibt die nämliche. Die Größen r, μ, ϑ beziehen sich aber auf die Reihe der wahren Fehler und man hätte sie, um die entsprechenden Größen für die Reihe der λ zu erhalten, mit $\sqrt{\frac{n-1}{n}}$ zu multiplizieren; indessen wird dies, wenn n einigermaßen groß ist, — und nur in diesem Falle hat die ganze Vergleichung Sinn und Bedeutung — an den Resultaten keine bemerkbare Änderung hervorbringen und kann wohl unterbleiben.

3. Beobachtungen von Bradley.

Die erste umfassende Prüfung des Gaußschen Fehlergesetzes durch die Erfahrung hat Bessel ausgeführt, teils an Beobachtungsreihen von Bradley, teils an eigenen, und damit gleichsam den ersten praktischen Beweis dieses Gesetzes gegeben.

Hier sollen die über jede Kritik erhabenen Daten von Bradley, den Laplace „das Muster eines Beobachters" nennt, näher betrachtet werden. Bradley führte 470 Beobachtungen aus, welche den Zweck hatten, die Differenz der Rektaszension zwischen der Sonne und den Sternen Ataïr und Procyon zu bestimmen. Bessel, welcher diese Beobachtungen mit großer Sorgfalt verarbeitete, bestimmte durch Subtraktion des arithmetischen Mittels aller Beobachtungen von jeder einzelnen die scheinbaren Fehler $-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots\ldots, -\lambda_{470}$, woraus sich der mittlere Fehler μ einer direkten Beobachtung mit $\pm 0{\cdot}391$ Zeitsekunden ergab. Der für das arithmetische Mittel zu befürchtende mittlere Fehler ist $\mu_x = \pm 0{\cdot}017$ sec; das arithmetische Mittel kommt folglich der Wirklichkeit sehr nahe und man kann die scheinbaren Fehler $-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots\ldots, -\lambda_{470}$ als die bei jeder Messung begangenen wahren Fehler $-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, \ldots\ldots, -\varepsilon_{470}$ ansehen. Wenn man diese Fehler ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen der Größenordnung nach in einer Tabelle zusammenstellt, so verteilen sich die 470 Fehler wie folgt:

zwischen	0·0	und	0·1	sec	 94	Fehler,
„	0·1	„	0·2	„	 88	„
„	0·2	„	0·3	„	 78	„
„	0·3	„	0·4	„	 58	„
„	0·4	„	0·5	„	 51	„
„	0·5	„	0·6	„	 36	„

zwischen	0·6	und	0·7	sec	26 Fehler,
„	0·7	„	0·8	„	14 „
„	0·8	„	0·9	„	10 „
„	0·9	„	1·0	„	7 „
über	1·0	sec		. . . .	8 Fehler.

Für den wahrscheinlichen Fehler r einer direkten Beobachtung fand Bessel aus dem mittleren Fehler einer Beobachtung $r = 0·2637$ sec; er verglich dann die Anzahl der Fehler, die zwischen den Grenzen 0·0 sec und 0·1 sec, 0·1 sec und 0·2 sec u. s. w. immer um 0·1 Sekunde aufsteigend der Theorie nach liegen sollen, mit den Fehlern, welche die wirkliche Erfahrung bei den 470 Beobachtungen ergeben hat.

Man hat zu diesem Zwecke in $\Phi\left(\varrho \frac{a}{r}\right) = \Phi(\varrho k)$ der Reihe nach $k = \frac{0·1}{r}, \frac{0·2}{r}, \frac{0·3}{r}$, u. s. w., also, da $\frac{1}{r} = 3·792$, $k = 0·3792$, $k = 0·7584$, $k = 1·1376$ u. s. w. zu setzen, die zugehörigen Werte von $\Phi(\varrho k)$ aus der Tabelle II oder III zu interpolieren und mit 470 zu multiplizieren, endlich je zwei aufeinanderfolgende der so erhaltenen Zahlen voneinander zu subtrahieren. Es sei z. B. die Zahl der Fehler zu berechnen, welche nach der Theorie zwischen 0·2 sec und 0·3 sec fallen müssen. Dividiert man 0·2 sec und 0·3 sec durch $r = 0·2637$ sec, so bekommt man die den Fehlern entsprechenden Werte des Arguments $\frac{a}{r} = k$. Diese Werte sind 0·7584 und 1·1376. Sucht man in der Tabelle II oder III die entsprechenden Funktionswerte auf, indem man proportional interpoliert, so findet man 0·391 und 0·557, d. h. von 1000 Fehlern liegen in der gegebenen Reihe 391 zwischen 0 sec und 0·2 sec, ferner 557 zwischen 0 sec und 0·3 sec, folglich $557 - 391 = 166$ zwischen 0·2 sec und 0·3 sec; von 470 Fehlern liegen also $470 \times 0·166 = 78$ in dem betrachteten Intervall. Auf diese Art ergab sich die Anzahl der Fehler

zwischen	berechnet	beobachtet	Unterschied
0·0 und 0·1 sec	95	94	+ 1
0·1 „ 0·2 „	89	88	+ 1
0·2 „ 0·3 „	78	78	0
0·3 „ 0·4 „	64	58	+ 6
0·4 „ 0·5 „	50	51	— 1
0·5 „ 0·6 „	36	36	0
0·6 „ 0·7 „	24	26	— 2
0·7 „ 0·8 „	15	14	+ 1
0·8 „ 0·9 „	9	10	— 1
0·9 „ 1·0 „	5	7	— 2
über 1·0 „	5	8	— 3

Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung läßt, wie man sieht, nichts zu wünschen übrig und bestätigt die Richtigkeit der der Theorie zu Grunde liegenden Anschauungen über die Natur der zufälligen Beobachtungsfehler.

Es ist richtig, daß jeder dieser Fehler, für sich allein betrachtet, vollständig zufällig ist; anderseits ist es unanfechtbar, daß bei jeder einigermaßen ausgedehnten Beobachtungsreihe ein klares Gesetz zum Ausdruck kommt, welches die Größe der Fehler, von ihrer Reihenfolge abgesehen, regelt.

4. Methode der mehrfachen Bestimmung einer und derselben, vom Fehlergesetz abhängigen Größe.

Ein weiteres Mittel, die Theorie mit der Erfahrung zu vergleichen, besteht in der mehrfachen Bestimmung einer und derselben, von dem Fehlergesetz abhängigen Größe, etwa des wahrscheinlichen Fehlers aus dem mittleren und durchschnittlichen Fehler, sowie durch Abzählung an der Fehlerreihe, oder des durchschnittlichen Fehlers aus den λ einerseits und den Beobachtungsdifferenzen Δ anderseits (siehe Punkt 11 des IV. Abschnittes) u. s. w.

Hiezu muß jedoch folgende Bemerkung beigefügt werden: Es läßt sich streng nachweisen, daß die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers durch Abzählung an der Fehlerreihe der gebräuchlichen Bestimmung aus $[|\varepsilon|]$ und $[\varepsilon\varepsilon]$ an Genauigkeit weit nachsteht (siehe Czubers Theorie der Beobachtungsfehler, Seite 141, Punkt 59). Wenn daher die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers r schon bei Benützung der wahren Fehler $-\varepsilon$ unsicher ist, so muß die Bestimmung von r auf Grund der scheinbaren Fehler $-\lambda$ in noch höherem Maße unsicher sein.

5. Mikroskopische Bestimmungen eines Teilstriches auf einem Längenmaßstabe.

In diesem Beispiele liegt eine Reihe von 40 mikroskopischen Bestimmungen der Lage eines Teilstriches auf einem Maßstabe vor. Diese in England ausgeführten Bestimmungen sind in der in englischer Sprache veröffentlichten Geodäsie von A. R. Clarke enthalten und von hier in die des öfteren genannte „Theorie der Beobachtungsfehler" von Czuber übernommen worden. Die Beobachtungen sind von gleicher Genauigkeit und ergaben folgendes Resultat (die Einheit ist $\frac{1}{1\,000\,000}$ Yard oder 0·91 Mikrons):

3·68	2·81	5·48	3·28
3·11	4·65	3·76	3·78
4·76	3·27	4·59	3·22
2·75	4·08	2·64	3·98
4·15	4·51	2·98	3·91
5·08	4·43	4·21	5·21
2·95	3·43	5·23	4·43
6·35	3·26	4·45	2·28
3·78	2·48	3·95	4·10
4·49	4·84	2·66	4·18

Das arithmetische Mittel ist 3·93 und die Abweichungen der einzelnen Beobachtungen von demselben oder ihre scheinbaren Fehler, in der nämlichen Ordnung zusammengestellt, sind die folgenden:

+ 0·25	+ 1·12	— 1·55	+ 0·65
+ 0·82	— 0·72	+ 0·17	+ 0·15
— 0·83	+ 0·66	— 0·66	+ 0·71
+ 1·18	— 0·15	+ 1·29	— 0·05
— 0·22	— 0·58	+ 0·95	+ 0·02
— 1·11	— 0·50	— 0·28	— 1·28
+ 0·98	+ 0·50	— 1·30	— 0·50
— 2·42	+ 0·67	— 0·52	+ 1·65
+ 0·15	+ 1·45	— 0·02	— 0·17
— 0·56	— 0·91	+ 1·27	— 0·25

Dem Vorzeichen nach kommt ihre Verteilung der wahrscheinlichsten sehr nahe, indem 19 positiven 21 negative λ gegenüberstehen; sie liegt innerhalb der wahrscheinlichen Grenzen (etwa 17 und 23).

Die algebraische Summe der Abweichungen, nämlich $[\lambda]$, ist 14·64 — 14·58 = 0·06 statt 0·00 (wegen der Abrundung des arithmetischen Mittels).

Aus der Summe der Quadrate $[\lambda\lambda] = 32 \cdot 4364$ ergibt sich der mittlere Fehler einer Beobachtung

$$\mu = 0 \cdot 912$$

und daraus der wahrscheinliche Fehler

$$r = 0 \cdot 615;$$

aus der Summe der Absolutwerte der λ, $[|\lambda|] = 29 \cdot 22$, berechnet sich der durchschnittliche Fehler einer Beobachtung

$$\vartheta = 0 \cdot 742,$$

und daraus in bekannter Weise

$$r = 0{\cdot}628;$$

anderseits folgt aus der Summe der Absolutwerte der Beobachtungsdifferenzen, $[|\Delta|] = 815{\cdot}40$,

$$\vartheta = 0{\cdot}739$$

und daraus

$$r = 0{\cdot}624;$$

die am wenigsten verläßliche Methode der Abzählung endlich führt zu

$$r = 0{\cdot}66.$$

Die Verteilung der Fehler verglichen mit der theoretischen, dem Gaußschen Gesetze entsprechenden Verteilung ergibt folgende Zahlen:

Grenzen	Beobachtung	Theorie	Unterschied
0·0 bis 0·5	15	16·6	+ 1·6
0·5 „ 1·0	14	12·5	— 1·5
1·0 „ 1·5	8	6·9	— 1·1
über 1·5	3	4·0	+ 1·0

Im Hinblick auf die nur mäßige Anzahl der Beobachtungen kann die Übereinstimmung als befriedigend bezeichnet werden.

Es könnte noch eine große Zahl von Erfahrungsdaten aus den verschiedensten Gebieten beigebracht werden, welche geeignet sind, zu bestätigen, daß es sehr viele Fälle gibt, in welchen die Fehler eine dem Gaußschen Gesetze entsprechende Verteilung aufweisen. Wiederholt sind Messungen eigens zu dem Zwecke ausgeführt worden, um jenes Gesetz zu prüfen oder um auf ihre Ergebnisse einen Beweis a posteriori für das Fehlergesetz zu gründen und dadurch jeder Hypothese über die Natur der Fehler, über die zweckmäßigste Wahl des Wertes der beobachteten Größe o. dgl. aus dem Wege zu gehen, da ohne eine solche ein Beweis a priori nicht gegeben werden kann. Diesem Gedanken hat unter anderen Faye bestimmten Ausdruck verliehen und Laurent hat sich in ähnlichem Sinne der Mühe unterzogen, eine größere Versuchsreihe auszuführen, um die Fehlerverteilung auf empirischem Wege festzustellen, da ihm die Gaußsche Form der Wirklichkeit hauptsächlich aus dem Grunde nicht zu entsprechen schien, weil sie auch noch so großen Fehlern eine von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit zuschreibt. Indessen haben

seine Versuche doch kein anderes Ergebnis gehabt als zu bestätigen, daß das Gaußsche Gesetz jene Übereinstimmung mit der Erfahrung zeigt, die überhaupt erwartet werden kann.

6. Paarweise Gruppierung der Fehler. Durchschnittlicher Wert der größeren Fehler und ihrer Quadrate.

Man kann aus dem Gaußschen Gesetze die mannigfachsten Konsequenzen in Betreff der Beobachtungsfehler und ihrer verschiedenen Kombinationen ziehen und, indem man dieselben mit der Erfahrung vergleicht, weitere Bestätigungen jenes Gesetzes gewinnen. Zwei Beispiele dieser Art — entnommen aus „Calcul des Probabilités" par J. Bertrand, Paris, 1889, Punkt 156 und 158 — mögen hier angeführt werden.

1. Beispiel. Wenn man die Absolutwerte der Fehler einer Beobachtungsreihe in willkürlicher Weise paart, so ist der Durchschnittswert der größeren Fehler in den Paaren gleich dem allgemeinen Durchschnittsfehler multipliziert mit $\sqrt{2}$.

Denn die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler im Betrage $|\varepsilon|$ mit einem kleineren Fehler sich verbinde, ist

$$2 \cdot \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon \int_0^\varepsilon \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon.$$

Der Faktor $\frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon$ drückt in der Tat die Wahrscheinlichkeit aus für das Auftreten eines Fehlers, positiv oder negativ, im Intervall ε bis $\varepsilon + d\varepsilon$; der Faktor $\int_0^\varepsilon \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon$ drückt die Wahrscheinlichkeit aus für das Auftreten eines Fehlers kleiner als ε; der dem Ausdrucke vorangehende Faktor 2 ist dadurch gerechtfertigt, weil von den willkürlich herausgegriffenen zwei Fehlern der größere sowohl an erster als auch an zweiter Stelle stehen kann.

Der Durchschnittswert von $|\varepsilon|$ ergibt sich demnach, wenn man den aufgestellten Wahrscheinlichkeitsausdruck mit ε multipliziert und dann die Summe für alle Werte von ε bildet; man erhält:

$$1) \qquad 2\int_0^\infty \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \varepsilon\, e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon \int_0^\varepsilon \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon.$$

Durch partielle Integration, indem man

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = u, \qquad \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \varepsilon e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = dv, \quad \text{somit}$$

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = du, \qquad -\frac{1}{h\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} = v$$

setzt, ergibt sich leicht, daß der Wert des Ausdruckes 1) gleichkommt

$$\left(-\frac{2}{h\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} \int_0^{\varepsilon} \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon\right)_0^{\infty} + \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-2h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon.$$

Da der Ausdruck innerhalb der Klammern an beiden Grenzen verschwindet, so ist der Wert des Ausdruckes 1) weiters gleich

$$\frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-2h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{4}{\pi h \sqrt{2}} \int_0^{\infty} e^{-2h^2 \varepsilon^2} d(h\sqrt{2}\,\varepsilon) =$$

$$= \frac{4}{\pi h \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{h\sqrt{\pi}} = \vartheta \sqrt{2}. \quad \left(\frac{1}{h\sqrt{\pi}} = \vartheta, \ \sqrt{2} = 1{\cdot}4142.\right)$$

Bezeichnet man den zu suchenden Durchschnittswert mit ϑ_g, so hat man somit:

$$\vartheta_g = \vartheta \sqrt{2}.$$

Den Durchschnittswert ϑ_k der Absolutwerte der kleineren Fehler in den Paaren erhält man durch folgenden Schluß. Der Durchschnittswert der Absolutwerte der größeren und der kleineren Fehler muß notwendig gleich sein dem allgemeinen Durchschnitt ϑ. Man hat also:

$$\vartheta = \frac{\vartheta_g + \vartheta_k}{2} = \frac{\vartheta\sqrt{2} + \vartheta_k}{2};$$

daraus

$$\vartheta_k = 2\vartheta - \vartheta\sqrt{2} = \vartheta(2 - \sqrt{2}).$$

Es verhält sich somit ϑ_g zu ϑ_k, oder was dasselbe ist, die Summe der absoluten Werte der größeren Fehler zur entsprechenden Summe der kleineren Fehler wie $(1 + \sqrt{2}) : 1$, denn man hat:

$$\frac{\vartheta_g}{\vartheta_k} = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1 + \sqrt{2}}{1} = 2{\cdot}4142.$$

Dieses Verhältnis ist in der Tat durch die Erfahrung bestätigt worden. So erhielt Delaunay aus 33 Reihen von Schießversuchen für dasselbe den Wert 2·41. Bertrand teilt die Ergebnisse von vier Beobachtungsreihen, welche im internationalen Bureau für Maße und Gewichte ausgeführt worden sind, und von einer Reihe Bradleyscher Beobachtungen mit. Es ergab

die	erste	Reihe	(von 58	Beobachtungen)	. . 2·28
„	zweite	„	(„ 90	„)	. . 2·33
„	dritte	„	(„ 54	„)	. . 2·40
„	vierte	„	(„ 77	„)	. . 2·49
„	fünfte	„	(„ 100	„)	. . 2·47
				arithmetisches Mittel	. . 2·39.

2. Beispiel. Das mittlere Quadrat des größeren von den beiden Fehlern eines Paares ist gleich dem allgemeinen Durchschnitte der Fehlerquadrate multipliziert mit $1+\frac{2}{\pi}$.

Denn es ist das mittlere Quadrat des größeren Fehlers ausgedrückt durch:

$$2\int_0^\infty \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon \int_0^\varepsilon \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon;$$

integriert man partiell in der Weise, daß man

$$\varepsilon\int_0^\varepsilon \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = u, \quad \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = dv, \quad \text{somit}$$

$$d\varepsilon\int_0^\varepsilon \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon + \varepsilon . \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = du, \quad -\frac{1}{h\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} = v$$

setzt, so kommt man zu dem Resultate:

$$\text{2)} \quad \begin{aligned} &\left(-\frac{2}{h\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} \varepsilon\int_0^\varepsilon \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon\right)_0^\infty + \\ &+ 2\int_0^\infty \frac{1}{h\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}\left(\varepsilon . \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon + d\varepsilon\int_0^\varepsilon \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon\right). \end{aligned}$$

Da der Ausdruck $e^{-h^2\varepsilon^2}\varepsilon$ an beiden Grenzen verschwindet (siehe die Anmerkung zum Punkte 8 des III. Abschnittes), so ist der Wert des Ausdruckes 2) weiters gleich

3) $\frac{4}{\pi}\int_0^\infty e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon \int_0^\varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon + \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \varepsilon\, e^{-2h^2\varepsilon^2} d\varepsilon.$

Mit Rücksicht darauf, daß $e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon$ das Differential von $\int_0^\varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon$ ist, kann man das erste Glied im Ausdrucke 3) auch in der Form schreiben:

$$\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon \,.\, d\int_0^\varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon\right) = \frac{4}{\pi}\,\frac{\left\{\left(\int_0^\varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon\right)^2\right\}_0^\infty}{2} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\left(\int_0^\varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon\right)^2\right\}_0^\infty = \frac{2}{\pi}\left\{\left(\int_0^\varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon\right)_0^\infty \left(\int_0^\varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon\right)_0^\infty\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^\infty e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon \,.\, \int_0^\infty e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon\right) = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^\infty e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon\right)^2.$$

Um $\int_0^\infty e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon$ zu finden, setze man $h\varepsilon = t$ und findet mit Rücksicht auf Punkt 5 des II. Abschnittes:

$$\int_0^\infty e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{h}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi};$$

hiemit ergibt sich für das erste Glied in 3) der Wert

$$\frac{4}{\pi}\int_0^\infty e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon \int_0^\varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{h^2}\,\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2h^2}.$$

Für das zweite Glied in 3) hat man

$$\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \varepsilon\, e^{-2h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = -\frac{1}{\pi h^2}\int_0^\infty d\left(e^{-2h^2\varepsilon^2}\right) = \frac{1}{\pi h^2}.$$

Mithin ist das mittlere Quadrat des größeren Fehlers tatsächlich gleich

$$\frac{1}{2h^2} + \frac{1}{\pi h^2} = \frac{1}{2h^2}\left(1 + \frac{2}{\pi}\right) = \mu^2\left(1 + \frac{2}{\pi}\right).\ \left(\mu^2 = \frac{1}{2h^2},\quad \frac{2}{\pi} = 0{\cdot}6366.\right)$$

Vier mit den 40 Fehlerquadraten der Beobachtungsreihe des Punktes 5 dieses Abschnittes von Hofrat Czuber ausgeführte derartige Versuche ergaben für das Verhältnis die Werte

1·523, 1·564, 1·671, 1·722,

deren Durchschnitt 1·620 mit dem theoretischen Werte $1 + \frac{2}{\pi} = 1{\cdot}6366$ gut übereinstimmt.

VIII. Abschnitt.

Der kleinste und der größte Fehler einer Beobachtungsreihe.

1. Allgemeine Bemerkung bezüglich des kleinsten und des größten Fehlers einer Beobachtungsreihe.

Denkt man sich die Fehler einer Beobachtungsreihe ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen in steigender Größe geordnet, so bietet sich die zunächst vom theoretischen, aber auch vom praktischen Standpunkte interessante Frage dar nach dem mutmaßlichen Werte des kleinsten und des größten unter ihnen.

Die einfache Überlegung führt zunächst zu der Erkenntnis, daß diese Werte von dem Grade der Genauigkeit, aber auch von dem Umfange der Beobachtungsreihe abhängen werden. Je mehr Beobachtungen man ausführt, desto näher wird einerseits der kleinste Fehler an die Null heranrücken, desto weiter wird anderseits der größte Fehler sich von ihr entfernen: der Bereich der Fehler wird sich nach beiden Seiten hin ausdehnen.

Der wahrscheinliche Wert des kleinsten Fehlers läßt sich unter Voraussetzung einer großen Anzahl von Beobachtungen näherungsweise leicht bestimmen; schwieriger gestaltet sich die Frage nach dem Maximalfehler.

Die Beantwortung der in Rede stehenden Fragen ist dem Werke „Theorie der Beobachtungsfehler" von Czuber entnommen.

2. Der kleinste, zweitkleinste u. s. w. Fehler einer Beobachtungsreihe.

Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Beobachtung einen Fehler vom absoluten Betrage ε zu begehen, lautet bekanntlich:

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon;$$

die Wahrscheinlichkeit, daß einer Beobachtung ein zwischen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ liegender Fehler zukomme, ist:

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varepsilon} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon,$$

endlich hat man für die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, nämlich für die Wahrscheinlichkeit, daß einer Beobachtung ein dem absoluten Betrage nach größerer Fehler als ε zukomme,

$$1 - \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varepsilon} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon.$$

Dies vorausgesetzt, kann man behaupten: Die Wahrscheinlichkeit, daß unter n Beobachtungen einer bestimmten Beobachtung ein Fehler vom absoluten Betrage ε anhafte und daß dieser unter allen der kleinste sei, kommt gleich

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon \left(1 - \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varepsilon} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon\right)^{n-1};$$

folglich stellt sich die Wahrscheinlichkeit, daß ε der Absolutwert des kleinsten unter den n Beobachtungsfehlern überhaupt sei, unter die Form

$$n \left\{1 - \Phi(\varepsilon)\right\}^{n-1} d\left\{\Phi(\varepsilon)\right\},$$

wenn zur Abkürzung

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varepsilon} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \Phi(\varepsilon)$$

gesetzt wird. Der Faktor n erscheint dadurch gerechtfertigt, daß der kleinste Fehler bei irgend einer der n Beobachtungen auftreten kann. Hienach ist der wahrscheinliche (durchschnittliche) Wert des kleinsten Fehlers

$$\int_0^{\infty} n\varepsilon \left\{1 - \Phi(\varepsilon)\right\}^{n-1} d\left\{\Phi(\varepsilon)\right\}.$$

Integriert man partiell, indem

$$\varepsilon = u, \qquad n\left\{1 - \Phi(\varepsilon)\right\}^{n-1} d\left\{\Phi(\varepsilon)\right\} = dv, \quad \text{also}$$
$$d\varepsilon = du, \qquad -\left\{1 - \Phi(\varepsilon)\right\}^{n} = v$$

gesetzt wird, so erhält man:

$$-\left(\varepsilon\left\{1 - \Phi(\varepsilon)\right\}^{n}\right)_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \left\{1 - \Phi(\varepsilon)\right\}^{n} d\varepsilon;$$

diese Summe reduziert sich auf das zweite Glied, nämlich auf

$$1) \qquad \int_0^\infty \{1 - \Phi(\varepsilon)\}^n \, d\varepsilon,$$

weil das erste Glied an beiden Grenzen verschwindet. Um dies für die obere Grenze zu erkennen, beachte man, daß

$$1 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon + \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_\varepsilon^\infty e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon =$$

$$= \Phi(\varepsilon) + \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_\varepsilon^\infty e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon$$

ist; daraus folgt:

$$1 - \Phi(\varepsilon) = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_\varepsilon^\infty e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_\infty^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} e^{-h^2\varepsilon^2} d(-h^2\varepsilon^2);$$

nun ist:

$$\int_\infty^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} e^{-h^2\varepsilon^2} d(-h^2\varepsilon^2) < \frac{1}{\varepsilon} \int_\infty^\varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2} d(-h^2\varepsilon^2) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \left\{ e^{-h^2\varepsilon^2} \right\}_\infty^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} e^{-h^2\varepsilon^2},$$

daher

$$1 - \Phi(\varepsilon) < \frac{1}{h\sqrt{\pi}\,.\,\varepsilon} e^{-h^2\varepsilon^2}.$$

Wenn ε klein ist, so unterscheidet sich $\Phi(\varepsilon)$ nur wenig von $h\varepsilon$, denn

$$2) \qquad \Phi(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\varepsilon} e^{-t^2} dt = h\varepsilon \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\eta^2} \right), \text{ wo } 0 < \eta < \varepsilon.$$

Es muß nämlich zwischen dem kleinsten Werte K und dem größten Werte G, welchen die Funktion e^{-t^2} in dem Intervalle 0 bis $h\varepsilon$ annimmt, notwendig eine solche Zahl M vorhanden sein, daß

$$\int_0^{h\varepsilon} e^{-t^2} dt = (h\varepsilon - 0) M = h\varepsilon\,.\,M;$$

dieser Wert M wird für einen Wert von t aus dem Intervalle 0 bis $h\varepsilon$ erhalten; er wurde mit η bezeichnet.

Auch die Tabelle I der Funktion $\Phi(t)$ bestätigt diese Behauptung, indem sie zeigt, daß sich $\Phi(t)$ für kleine Werte von t nur wenig

von t unterscheidet. Ist nun in 2) ε klein, so ist der eingeklammerte Faktor von der Einheit sehr wenig verschieden. Es ist nämlich: $\frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1{\cdot}1284$; ferner nimmt beispielsweise für t gleich 0·1, 0·2, 0·3, 0·4, 0·5 die Funktion e^{-t^2} beziehungsweise die Werte an 0·990 05, 0·960 79, 0·913 93, 0·852 14, 0·778 80. Für größere Werte von ε hingegen wird der Ausdruck $\{1 - \Phi(\varepsilon)\}^n$ so klein, daß er von da an nur sehr wenig zu dem Werte des Integrals beiträgt. Man kann also an die Stelle des Integrationsgebietes 0 bis ∞ ein endliches 0 bis k setzen, wo k einen beliebigen endlichen Wert bezeichnet, und hat dann statt 1) näherungsweise

$$\int_0^k (1 - h\varepsilon)^n d\varepsilon = -\frac{1}{h}\int_0^k (1 - h\varepsilon)^n d(1 - h\varepsilon) = \frac{1 - (1 - hk)^{n+1}}{(n+1)h}.$$

Wird n als groß vorausgesetzt, so kann k immer so gewählt werden, daß $(1 - hk)^{n+1}$ neben der Einheit verschwindet, so daß der wahrscheinliche Wert des kleinsten Fehlers näherungsweise gleich

$$3)\qquad \frac{1}{(n+1)h}$$

ist oder, durch den mittleren Fehler einer Beobachtungsreihe $\left(\mu = \frac{1}{h\sqrt{2}}\right)$ ausgedrückt, dem Werte

$$4)\qquad \frac{\mu\sqrt{2}}{n+1}$$

gleichkommt.

Durch dasselbe Verfahren kann auch der wahrscheinliche (durchschnittliche) Wert des zweitkleinsten Fehlers ermittelt werden. Die Wahrscheinlichkeit, daß unter n Beobachtungsfehlern der zweitkleinste Beobachtungsfehler absolut genommen gleich ε sei, ergibt sich durch ähnliche Schlüsse wie die vorher angewandten und ist

$$n\,\Phi(\varepsilon) \times (n-1)\{1 - \Phi(\varepsilon)\}^{n-2} d\{\Phi(\varepsilon)\} =$$
$$= n(n-1)\,\Phi(\varepsilon)\{1 - \Phi(\varepsilon)\}^{n-2} d\{\Phi(\varepsilon)\};$$

demnach ist sein wahrscheinlicher (durchschnittliche) Wert

$$5)\quad \begin{cases} \int_0^\infty n(n-1)\,\varepsilon\,\Phi(\varepsilon)\{1 - \Phi(\varepsilon)\}^{n-2} d\{\Phi(\varepsilon)\} = \\ = n(n-1)\int_0^\infty \varepsilon\,\Phi(\varepsilon)\{1 - \Phi(\varepsilon)\}^{n-2} d\{\Phi(\varepsilon)\} = n(n-1)J, \end{cases}$$

wenn der Kürze wegen das letzte Integral mit J bezeichnet wird.

Weil $d\{\Phi(\varepsilon)\} = -\{1 - \Phi(\varepsilon)\}$ ist, folgt:

$$J = -\int_0^\infty \varepsilon\,\Phi(\varepsilon)\{1 - \Phi(\varepsilon)\}^{n-2}\, d\{1 - \Phi(\varepsilon)\};$$

berücksichtigt man ferner die Identität $-\Phi(\varepsilon) = \{1 - \Phi(\varepsilon)\} - 1$, so kann man auch schreiben:

$$J = \int_0^\infty \varepsilon\{1 - \Phi(\varepsilon)\}^{n-1}\, d\{1 - \Phi(\varepsilon)\} - \int_0^\infty \varepsilon\{1 - \Phi(\varepsilon)\}^{n-2}\, d\{1 - \Phi(\varepsilon)\}.$$

Die partielle Integration gibt, wenn man in beiden Integralen $\varepsilon = u$ setzt

$$\varepsilon\left(\frac{\{1 - \Phi(\varepsilon)\}^n}{n} - \frac{\{1 - \Phi(\varepsilon)\}^{n-1}}{n-1}\right)_0^\infty +$$

$$+ \frac{1}{n-1}\int_0^\infty \{1 - \Phi(\varepsilon)\}^{n-1}\, d\varepsilon - \frac{1}{n}\int_0^\infty \{1 - \Phi(\varepsilon)\}^n\, d\varepsilon.$$

Der integralfreie Teil verschwindet an beiden Grenzen; das Integral $\int_0^\infty \{1 - \Phi(\varepsilon)\}^{n-1}\, d\varepsilon$ hat früherem zufolge den Näherungswert $\frac{1}{nh}$, das Integral $\int_0^\infty \{1 - \Phi(\varepsilon)\}^n\, d\varepsilon$ den Näherungswert $\frac{1}{(n+1)h}$. Hiemit geht der Ausdruck 5) über in:

$$6)\qquad n(n-1)\left\{\frac{1}{n(n-1)h} - \frac{1}{n(n+1)h}\right\} = \frac{1}{h} - \frac{n-1}{(n+1)h} = \frac{2}{(n+1)h};$$

der wahrscheinliche (durchschnittliche) Wert des zweitkleinsten Fehlers ist also doppelt so groß als der wahrscheinliche (durchschnittliche) Wert des kleinsten Fehlers.

In gleicher Weise ergäbe sich der wahrscheinliche (durchschnittliche) Wert des drittkleinsten Fehlers als das Dreifache des wahrscheinlichen (durchschnittlichen) Wertes des kleinsten Fehlers u. s. f., so lange die gebrauchten Abkürzungen zulässig sind.

Der scheinbare Widerspruch zwischen dem Resultate 6) und der Symmetrie des Fehlergesetzes, welcher zufolge man erwarten möchte, daß die beiden kleinsten Fehler dem absoluten Werte nach gleich sind, verschwindet, wenn man auf den Unterschied zwischen dem wahrscheinlichen Werte einer Größe und demjenigen Werte achtet, welchen sie mutmaßlich annimmt. Bertrand erklärt diesen Unterschied an einem Beispiele. Peter und Paul sollen sich in eine Erbschaft teilen. Man weiß, daß der eine zwei Drittel, der andere

ein Drittel des Ganzen erhält, man weiß aber nicht welcher. Der wahrscheinliche Wert des Anteils für Peter ist $\frac{1}{2}$, jener des Anteils für Paul ebenfalls $\frac{1}{2}\cdot$ Dagegen ist der Wert, welchen der größere Teil mutmaßlich (hier gewiß) annimmt, $\frac{2}{3}\cdot$

Der wahrscheinliche (durchschnittliche) Wert des kleinsten Fehlers 3) kann auch in der Form $\frac{\vartheta\sqrt{\pi}}{n+1}$ geschrieben werden, wenn ϑ den durchschnittlichen Fehler einer Beobachtung $\left(\vartheta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}\right)$ bezeichnet. Der wahrscheinliche (durchschnittliche) Wert des Fehlers im arithmetischen Mittel dagegen beträgt $\frac{\vartheta}{\sqrt{n}}$ (siehe Punkt 4 des IV. Abschnittes); jener ist also von der Ordnung $\frac{1}{n}$, dieser von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot$ Wäre es daher möglich, unter den Beobachtungen die genauesten, dies Wort im gewöhnlichen Sprachgebrauche genommen, nämlich die mit dem kleinsten Fehler behafteten herauszufinden, so würden diese ein viel genaueres Resultat liefern als das arithmetische Mittel aus allen Beobachtungen es darstellt.

3. Der größte zu gewärtigende Fehler einer Beobachtungsreihe.

Dem Gaußschen Fehlergesetz ist der Begriff des Maximalfehlers im mathematischen Sinne fremd, insofern es jedem noch so großen Fehler eine von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit zuschreibt. Nichtsdestoweniger gibt dieses Gesetz doch Mittel an die Hand, den größten zu gewärtigenden Fehler in einer Beobachtungsreihe von bekannter Genauigkeit und Ausdehnung zu schätzen.

Es sei n die Anzahl der Beobachtungen, h das Präzisionsmaß, μ der mittlere Fehler einer Beobachtungsreihe. Die Wahrscheinlichkeit, daß der irgend einer Beobachtung anhaftende Fehler dem absoluten Betrage nach gleich oder größer sei als a, ist dargestellt durch:

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_a^{\infty} e^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{ah}^{\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

Es wird nicht ohne Nutzen und Interesse sein, einige der auf Verschärfung der Resultate durch Ausscheidung zweifelhafter Beobachtungen gerichteten Versuche, welche dem wiederholt zitierten Werke „Theorie der Beobachtungsfehler" von Czuber entnommen sind, kennen zu lernen und in ihren theoretischen Grundlagen zu verfolgen.

2. Kriterium von Peirce für beliebig viele auszuscheidende direkte Beobachtungen.

Es unterliegt keinem Zweifel, daß die Ausscheidung solcher Beobachtungen, deren Abweichung vom arithmetischen Mittel dem absoluten Betrage nach eine gewisse Grenze ω überschreitet und die vermutlich oder sogar höchst wahrscheinlich minder gut sind, die Genauigkeit des Resultates erhöhen müßte, und zwar in um so höherem Grade, je enger man jene Grenzen zieht. Eine von Bertrand ausgeführte Untersuchung bestätigt dies und gestattet den Grad der Verschärfung zu schätzen.

Man denke sich, sagt Bertrand, eine Person von seltener Geschicklichkeit, welche, ohne selbst zu beobachten, alle Vorgänge der Messung aufmerksam überwacht und, auf das genaueste vertraut mit der Beobachtungsmethode, den Unvollkommenheiten des Instrumentes und den Schwächen des Beobachters, ihr Urteil über jede einzelne Beobachtung mit dem einzigen Worte „gut" oder „schlecht" ausdrückt. Es ist klar, daß die Unterdrückung der als schlecht bezeichneten Beobachtungen die Zuverlässigkeit der Resultate um so mehr erhöhen wird, je mehr Beobachtungen beseitigt worden sind, oder besser gesagt, je rigoroser die überwachende Person zu Werke ging.

Auf die Methode, die Genauigkeit des arithmetischen Mittels zu erhöhen durch Ausscheidung von Beobachtungen, deren scheinbare Fehler eine gewisse Grenze überschreiten, welche aber zur Durchführung die Kenntnis des Theorems von Bernoulli beansprucht, soll hier nicht eingegangen werden, weil die Vorführung des genannten Theorems, welches in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine hervorragende Rolle spielt, allzu weitläufige Nebenuntersuchungen erfordern würde.

Nachstehend soll das Kriterium von Peirce besprochen werden.

B. Peirce hat die Grenze ω durch wahrscheinlichkeitsthoretische Betrachtungen festzustellen versucht und ein Kriterium aufgestellt, mittels dessen darüber entschieden werden soll, ob eine zweifelhafte Beobachtung der Wirkung störender Ursachen zuzuschreiben und